



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA
DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO:
MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE BARRA**

FLAVIA GELATTI

FLORIANÓPOLIS – SC
2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA
DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO:
MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE BARRA**

Dissertação submetida à Universidade
Federal de Santa Catarina como
requisito parcial exigido pelo
Programa de Pós Graduação em
Engenharia Civil – PPGEC para
obtenção do título de MESTRE em
Engenharia Civil

FLAVIA GELATTI

FLORIANÓPOLIS – SC
2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gelatti, Flavia

Análise não linear física e geométrica de pórticos planos
de concreto armado: [tese] : Modelagem por elementos
finitos de barra / Flavia Gelatti ; orientadora,
Henriette Lebre La Rovere - Florianópolis, SC, 2012.
239 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia Civil. 2. Análise não linear. 3. Pórtico
plano. 4. Concreto armado. I. Rovere, Henriette Lebre La .
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA
DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO:
MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE BARRA**

FLAVIA GELATTI

Dissertação julgada adequada para obtenção
do título de MESTRE em Engenharia Civil e
aprovada em sua forma final pelo Programa
de Pós Graduação em Engenharia Civil –
PPGEC da Universidade Federal de Santa
Catarina – UFSC.

Henriette Lebre La Rovere, PhD - Orientadora

Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD – Coordenador do PPGEC

Comissão examinadora:

Dr. Marcio Antonio Ramalho – EESC/USP

Dr. Poliana Dias Moraes – ECV/UFSC

Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD – ECV/UFSC

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e à minha irmã, por seu apoio e pelo eterno incentivo à minha formação acadêmica

À professora Henriette Lebre La Rovere, pela confiança depositada em mim, horas incansáveis de orientação e pela constante dedicação

Aos meus professores da graduação, que me orientaram durante anos, em especial ao professor Andriei José Beber, pela inspiração a sempre me desafiar e buscar novos caminhos

Ao professor Marcio Antonio Ramalho, pela atenção e tempo dedicado na avaliação deste trabalho e pelas contribuições dadas

Ao professor Gerson Moacyr Sisniegas Alva, pela disponibilidade em ajudar e fornecer dados para os estudos deste trabalho

Aos meus professores da pós graduação, pela vontade incondicional de compartilhar anos de experiência e conhecimento

Aos meus amigos da pós graduação, com quem tive o prazer de dividir o GRUPEX, e aos amigos de longa data, o seu apoio foi fundamental

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPQ), pela concessão da bolsa de estudos e aos funcionários do departamento do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o estudo da análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado. As análises são realizadas por meio do programa ANALEST, que utiliza um modelo não linear em que as estruturas são modeladas por elementos finitos de barra. Cada elemento possui três nós e um total de sete graus de liberdade, sendo o terceiro nó interno com apenas deslocamento axial. A formulação dos elementos baseia-se na teoria de viga de Euler-Bernoulli, na qual a deformação por cisalhamento é desprezada. A não linearidade física é considerada ao longo do elemento e da seção, dividida em lamelas, admitindo-se que cada lamela está sob estado uniaxial de tensões, utilizando-se leis constitutivas não lineares para o concreto e armaduras de aço. A não linearidade geométrica segue a Formulação Lagrangeana Total. São analisados pórticos de 1 a 16 pavimentos, com diferentes características geométricas - altura de pavimento, número de vãos, e diferentes propriedades dos materiais. Inicialmente, são feitos alguns estudos de modelagem para cada pórtico, investigando-se alguns parâmetros, modelos constitutivos e a estabilidade numérica de algoritmos de solução de equações não lineares. O programa ANALEST é em seguida validado comparando-se seus resultados com os de modelos/programas de outros autores. Investiga-se também a influência das não linearidades (física e geométrica), consideradas isoladamente e combinadas, e são traçados mapas de evolução da não linearidade física de cada pórtico. Finalmente o modelo não linear do ANALEST é comparado a um modelo que considera a não linearidade física de forma simplificada, utilizando-se o programa SAP2000. Com base nos resultados dos estudos, são extraídas conclusões acerca do tema e algumas recomendações para trabalhos futuros.

Palavras Chave: Análise não linear, pórtico plano, concreto armado.

ABSTRACT

This work aims to study the material and geometric nonlinearity of reinforced concrete plane frames. The analyses are performed using a computer program named ANALEST, based on a nonlinear model in which the structures are modeled by finite elements. Plane frame elements are utilized, with three nodes and a total of seven d.o.f., in which the third node is internal and has only axial displacement. The element formulation is based on the Euler-Bernoulli theory, disregarding shear deformation. The material nonlinearity is considered along the length of the element and along its section, subdivided into layers, assuming that each layer is subjected to a uniaxial stress-state, using nonlinear constitutive relations for concrete and steel reinforcement. The geometric nonlinearity follows the Total Lagrangean formulation. Frames ranging from one to sixteen pavements are analyzed, with different geometric characteristics - height, number of spans, and different material properties. Initially, some modeling studies are performed, investigating different parameters, constitutive relations and the numerical stability of solution algorithms for the nonlinear equations. Next, the nonlinear model implemented into ANALEST program is validated by comparison of its results with the ones obtained using different models/programs developed by other authors. The influence of the nonlinearities (material and geometric), considered isolated and combined, is also investigated and maps describing the material nonlinearity evolution are created for each frame. Finally the nonlinear model of ANALEST is compared with a model that considers material nonlinearity in a simplified way, using SAP2000 computer program. Based on the results of the studies, conclusions on the topic and a few recommendations for future work are extracted.

Key-words: Nonlinear analysis, plane frame, reinforced concrete.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-1 - Diferentes tipos de análises em pórtico plano de concreto armado.....	24
Figura 4-1 - Elemento de barra para pórtico plano.....	52
Figura 4-2 - Deslocamento de um ponto genérico	52
Figura 4-3 - Deformação de uma barra com hipótese de <i>Euler-Bernoulli</i> considerando grandes rotações	64
Figura 4-4 – Modelo constitutivo original de Hognestad.....	75
Figura 4-5 - Modelo constitutivo do CEB-90 (1990).....	76
Figura 4-6 - Modelo constitutivo de Mander <i>et al.</i> (1988).....	78
Figura 4-7 – Modelo constitutivo com modelo de <i>tension-stiffening</i>	80
Figura 4-8 - Modelo constitutivo para o aço	82
Figura 4-9 - Método das lamelas.....	83
Figura 4-10 - Exemplo de discretização do método das lamelas a) discretização das seções em camadas; b) distribuição de deformações; c) distribuição de tensões e d) esforços totais.....	84
Figura 4-11 - Método de Newton-Raphson tangente	89
Figura 4-12 - Método do Comprimento do Arco, Wemper (1971) e Riks (1972) <i>apud</i> Stramandinoli (2007).....	90
Figura 4-13 - Variáveis do Método do Comprimento do arco, Wemper (1971) e Riks (1972) <i>apud</i> Stramandinoli (2007)	91
Figura 5-1 - P1: Malha e seção transversal das barras (dimensões em centímetros).....	98
Figura 5-2 - P2: Malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)	100
Figura 5-3 - P2: Localização das seções tipo A e B nas vigas	101
Figura 5-4 - P3: malha e cargas aplicadas (dimensões em cm).....	104
Figura 5-5 - P4: malha e cargas aplicadas (dimensões em cm).....	106
Figura 5-6 - P5: detalhes das seções.....	107
Figura 5-7 - P5: Malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)	109
Figura 5-8 - P6: Dimensões dos pilares e vigas	110
Figura 5-9 - P6: malha e cargas aplicadas (dimensões em cm).....	111
Figura 5-10 - Malha usada por Oliveira (2007).....	114
Figura 5-11 - Carga X deslocamento - Comparação com Oliveira (2007) - P1	115

Figura 5-12 - Malha utilizada por Banki (1999) - Comparação com Banki (1999) - P2.....	117
Figura 5-13 - Carga X deslocamento - Comparação com Pinto (2002) - P3	119
Figura 5-14 – Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLGF) – em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando ambas não linearidades - P3.....	120
Figura 5-15 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLG) em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando apenas não linearidade geométrica – P3.....	121
Figura 5-16 - Carga X deslocamento - Comparação com Pinto (2002) - P4	122
Figura 5-17 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLGF) – em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando ambas não linearidades - P4.....	123
Figura 5-18 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLG) em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando apenas não linearidade geométrica - P4.....	124
Figura 5-19 - Carga x deslocamento (a) - Comparação com Oliveira (2007) – P6.....	126
Figura 5-20 - Carga X deslocamento (b) - Comparação com Oliveira (2007) - P6	127
Figura 5-21 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLGF) – em comparação com a obtida por Oliveira (2007), considerando ambas não linearidades - P6.....	128
Figura 5-22 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P1	132
Figura 5-23 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P2	134
Figura 5-24 - Deformada - Influência das NL's - P2.....	136
Figura 5-25 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P2	138
Figura 5-26 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P3	139
Figura 5-27 - Deformada - Influência das NL's - P3.....	141
Figura 5-28 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P3	143
Figura 5-29 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P4	144
Figura 5-30 - Deformada - Influência das NL's - P4.....	146
Figura 5-31 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P4	148
Figura 5-32 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P5	150

Figura 5-33 - Deformada - Influência das NL's P5	152
Figura 5-34 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P5	154
Figura 5-35 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P6.....	156
Figura 5-36 - Carga X deslocamento b - Influência das NL's - P6.....	157
Figura 5-37 - Deformada - Influência das NL's - P6	158
Figura 5-38 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P6	162
Figura 5-39 - Viga do segundo pavimento sob carga de 18,2 kN	169
Figura 5-40 - Viga do segundo pavimento sob carga de 20,034 kN ...	169
Figura 5-41 - Viga do segundo pavimento sob carga de 7,82 kN	172
Figura 5-42 - Viga do segundo pavimento sob carga de 11,378 kN ...	172
Figura 5-43 - Carga X deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P1	180
Figura 5-44 - Carga X deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P2	182
Figura 5-45 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P2.....	184
Figura 5-46 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P3	186
Figura 5-47 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P3.....	187
Figura 5-48 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P4	189
Figura 5-50 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P5	192
Figura 5-51 - Deformadas - Estudo NLGF simplificada - P5	193
Figura 5-52 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P6	195
Figura 5-53 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P6.....	196
Figura 1 - Carga X deslocamento - Número de camadas na seção - P1	216
Figura 2 - Carga X deslocamento - Número de camadas na seção - P3	217
Figura 3 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P1	219
Figura 4 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P2	219

Figura 5 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P3	220
Figura 6 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P4	220
Figura 7 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P5	221
Figura 8 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P6	221
Figura 9 - Diagrama de momento fletor da análise elástico linear - P1	223
Figura 10 - Carga X deslocamento - Modelo <i>tension-stiffening</i> - P1..	224
Figura 11 - Diagrama de momento fletor da análise elástico linear - P2	225
Figura 12 - Carga X deslocamento - Modelo <i>tension-stiffening</i> - P2..	226

LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1 - Parâmetros do concreto.....	98
Tabela 5-2 - Parâmetros do aço.....	99
Tabela 5-3 - Parâmetros do concreto.....	101
Tabela 5-4 - Parâmetros do aço.....	101
Tabela 5-5 - P2: Armadura das seções.....	102
Tabela 5-6 - Parâmetros do concreto.....	103
Tabela 5-7 - Parâmetros do aço.....	103
Tabela 5-8 - Parâmetros do concreto.....	105
Tabela 5-9 - Parâmetros do aço.....	105
Tabela 5-10 - P5: Armaduras longitudinais dos pilares	107
Tabela 5-11 - P5: Armaduras longitudinais das vigas.....	107
Tabela 5-12 - Parâmetros do concreto.....	108
Tabela 5-13 - Parâmetros do aço.....	108
Tabela 5-14 - Parâmetros do concreto.....	110
Tabela 5-15 - Parâmetros do aço.....	110
Tabela 5-16 - Propriedades utilizadas por Silva (1996) - P1.....	112
Tabela 5-17 - Propriedades utilizadas por Oliveira (2007) - P1.....	113
Tabela 5-18 - Comparativo de resultados - Comparação com Oliveira (2007) - P1.....	115
Tabela 5-19 - Comparativo de resultados entre modelo do ANALEST (NLG) e modelo usado por Banki (1999) - P2.....	117
Tabela 5-20 - Propriedades utilizadas por Pinto (2002) - P3	118
Tabela 5-21 - Comparativo de resultados - Comparação com Pinto (2002) - P3.....	119
Tabela 5-22 - Comparativo de resultados - Comparação Pinto (2002) - P4	121
Tabela 5-23 - Propriedades utilizadas por Oliveira (2007) - P6.....	125
Tabela 5-24 - Comparativo de resultados - Comparação com Oliveira (2007) - P6.....	125
Tabela 5-25 - Valor dos parâmetros de instabilidade do pórtico P1 e valores limite.....	131
Tabela 5-26 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P1..	132

Tabela 5-27 - Valores dos parâmetros de instabilidade do pórtico P2 e valores limite.....	133
Tabela 5-28 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P2 .	135
Tabela 5-29 - Dados das deformadas - Influência das NL's - P2	137
Tabela 5-30 - Valores dos parâmetros de instabilidade do pórtico P3 e valores limite.....	139
Tabela 5-31 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P3 .	140
Tabela 5-32 - Resultados de deslocamentos ao longo dos andares - Influência das NL's - P3.....	142
Tabela 5-33 - Valores dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P4 e valores limite	144
Tabela 5-34 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P4 .	145
Tabela 5-35 - Resultados de deslocamento ao longo dos andares - Influência das NL's - P4.....	147
Tabela 5-36 - Valores dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P5 e valores limite.....	149
Tabela 5-37 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P5 .	149
Tabela 5-38 - Resultados de deslocamentos ao longo dos andares - Influência das NL's - P5	153
Tabela 5-39 - Valores dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P6 e valores limite	155
Tabela 5-40 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P6 .	155
Tabela 5-41 - Resultados de deslocamentos ao longo dos andares - Influência das NL's - P6.....	160
Tabela 5-42 - Resultados de deslocamento ao longo dos andares - Influência das NL's - P6.....	161
Tabela 5-43 - Relação entre contribuição dos andares e o deslocamento de topo.....	164
Tabela 5-44 - Comparativo entre análise P-Delta e análise P-Delta + Grandes Deslocamentos, para material elástico linear (SAP2000) – P5	175
Tabela 5-45 - Comparativo entre análise P-Delta e análise P-Delta + Grandes Deslocamentos com NLG e NLF simplificada (SAP2000) - P5	176
Tabela 5-46 - Comparativo de resultados – Estudo de NLG - P1	178

Tabela 5-47 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P1	180
Tabela 5-48 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P2.....	181
Tabela 5-50 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P3.....	185
Tabela 5-51 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P3	185
Tabela 5-52 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P4.....	188
Tabela 5-53 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P4	188
Tabela 5-54 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P5.....	190
Tabela 5-55 - Comparativo de resultados carga de projeto - Estudo NLGF simplificada - P5	191
Tabela 5-56 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P6.....	194
Tabela 5-57 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P6	195
Tabela 5-58 - Comparativo de resultados entre modelo de referência (NLGF) de cada pórtico e os modelos com não linearidade física simplificada.....	199
Tabela 1 - Comparativo de resultados - Modelo de <i>tension-stiffening</i> - P1	223
Tabela 2 - Comparativo de resultados - Modelo <i>tension-stiffening</i> - P2	225

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	23
1.1. JUSTIFICATIVA	25
1.2. OBJETIVOS	27
1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO	28
2.NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA	29
2.1. NÃO LINEARIDADE FÍSICA.....	29
2.2. NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	31
3.REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	35
3.1.ESTUDOS ANTERIORES EM PÓRTICOS COM NLF E NLG ..	35
3.2. ESTUDOS ANTERIORES EM VIGAS, PILARES E OUTRAS ESTRUTURAS COM NLF E NLG.....	43
3.3. CONSIDERAÇÕES DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	46
4.MODELO NÃO LINEAR DE ELEMENTOS FINITOS PARA PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO.....	49
4.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	49
4.2. FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE LINEAR.....	51
4.3. FORMULAÇÃO INCLUINDO A NÃO LINEARIDADE FÍSICA.....	59
4.4. FORMULAÇÃO COM INCLUSÃO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	63
4.5. FORMULAÇÃO COM INCLUSÃO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA	70
4.6. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	74
4.6.1. Concreto sob compressão uniaxial	74
4.6.2. Concreto sob tração uniaxial	78
4.6.3. Aço	81
4.7. MÉTODO DAS LAMELAS OU CAMADAS.....	83
4.8. SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES.....	86
4.9. SOFTWARE ANALEST	91
4.10. LIMITAÇÕES DO MODELO	92

5. ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE CA – COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS E INFLUÊNCIA DAS NÃO LINEARIDADES	95
5.1. INTRODUÇÃO	95
5.2. DESCRIÇÃO DOS PÓRTICOS	97
5.2.1. P1	97
5.2.2. P2	99
5.2.3. P3	103
5.2.4. P4	104
5.2.5. P5	106
5.2.6. P6	110
5.3. COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DO MODELO DO ANALEST E OS DE MODELOS DE OUTROS PROGRAMA/AUTORES	112
5.3.1. Introdução.....	112
5.3.2. P1	112
5.3.3. P2	116
5.3.4. P3	118
5.3.5. P4	121
5.3.6. P6	124
5.3.7. Comentários das análises.....	128
5.4. INFLUÊNCIA DAS NÃO LINEARIDADES NO COMPORTAMENTO DOS PÓRTICOS.....	129
5.4.1. P1	130
5.4.2. P2	133
5.4.3. P3	138
5.4.4. P4	143
5.4.5. P5	148
5.4.6. P6	154
5.4.7. Comentários das análises.....	162
5.5. ESPRAIAMENTO DA NLF AO LONGO DOS PÓRTICOS.	165
5.5.1. P1	165
5.5.2. P2	166
5.5.3. P3	167

5.5.4. P4.....	168
5.5.5. P5.....	169
5.5.6. P6.....	170
5.5.7. Comentários das análises	172
5.6. COMPARAÇÃO ENTRE MODELO DO ANALEST E MODELO SIMPLIFICADO USANDO PROGRAMA SAP2000	173
5.6.1. NLG no programa SAP2000.....	174
5.6.1.1. Resultados entre análises de NLG no SAP2000.....	175
5.6.2. NLF no programa SAP2000	177
5.6.3. P1.....	178
5.6.3.1. Estudo da não linearidade geométrica	178
5.6.3.2. Estudo da não linearidade física simplificada	179
5.6.4. P2.....	181
5.6.4.1. Estudo da não linearidade geométrica	181
5.6.4.2. Estudo da não linearidade física simplificada	181
5.6.5. P3.....	184
5.6.5.1. Estudo da não linearidade geométrica	184
5.6.5.2. Estudo da não linearidade física simplificada	185
5.6.6. P4.....	187
5.6.6.1. Estudo da não linearidade geométrica	187
5.6.6.2. Estudo da não linearidade física simplificada	188
5.6.7. P5.....	190
5.6.7.1. Estudo da não linearidade geométrica	190
5.6.7.2. Estudo da não linearidade física simplificada	191
5.6.8. P6.....	193
5.6.8.1. Estudo da não linearidade geométrica	193
5.6.8.2. Estudo da não linearidade física simplificada	194
5.6.9. Comentários das análises	197
6. CONCLUSÕES	201
6.1. CONCLUSÕES SOBRE O TRABALHO.....	201
6.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	205
7.Referência bibliográfica	207
APÊNDICE.....	215

APÊNDICE A – Estudos de modelagem	216
APÊNDICE B	227
APÊNDICE C	229
APÊNDICE D	231
APÊNDICE E	233
APÊNDICE F	235
APÊNDICE G	237

1. INTRODUÇÃO

Devido à sua simplicidade e à sua facilidade de implementação computacional, a análise elástico linear é ainda a mais utilizada pelos projetistas para obtenção dos esforços e deslocamentos em uma estrutura de concreto armado (CA). Neste tipo de análise admite-se que os materiais comportam-se segundo leis lineares de tensão aplicada e correspondente deformação, e que os deslocamentos sofridos pela estrutura são pequenos, de tal forma que sua configuração deformada não afeta as condições de equilíbrio de forças. Deve-se ter cautela, no entanto, com a aplicação destas hipóteses simplificadoras, pois em alguns casos, sobretudo no caso de estruturas mais esbeltas, elas deixam de ser válidas. As normas de projeto estrutural de CA indicam assim alguns procedimentos simplificados para a avaliação da esbeltez da estrutura, e também para consideração dos efeitos não lineares, quando necessário. A norma brasileira NBR6118/2007 recomenda uma redução da rigidez da peça na análise linear para considerar aproximadamente a não linearidade física, e a aplicação de um coeficiente majorador de esforços horizontais, obtidos da análise linear, para levar em conta aproximadamente a não linearidade geométrica.

Já a análise não linear é aquela que considera o comportamento não linear da estrutura, levando em conta a não linearidade física e/ou geométrica na formulação, buscando assim aproximar melhor o comportamento real da estrutura. Para a análise não linear existem modelos de diferentes níveis de complexidade, tanto modelos mais refinados, que levam em conta de uma maneira mais completa os efeitos não lineares, como modelos mais simplificados, que consideram de maneira aproximada estes efeitos.

Com relação à não linearidade física (NLF), o material concreto armado (CA) apresenta uma complexidade maior, inerente à combinação de seus constituintes – concreto e armadura de aço. Sob compressão, o concreto apresenta elevada resistência e a lei constitutiva pode ser considerada aproximadamente linear até cerca de 45% da tensão máxima, quando passa a ter comportamento não linear. Sob tração também apresenta comportamento não linear, já que tem baixa resistência e fissura sob baixos níveis de carregamento (em relação à sua capacidade resistente à compressão).

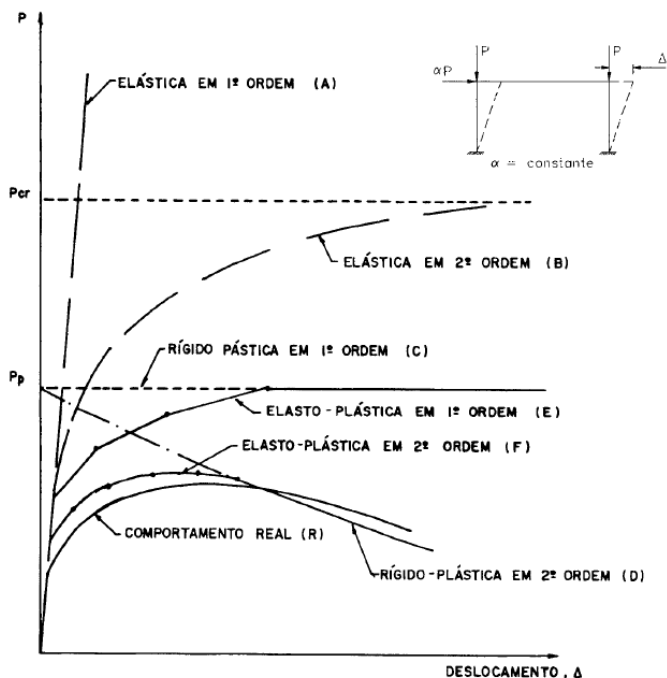
Devido à aderência entre os dois materiais, concreto e aço, após a fissuração há a transmissão de esforços de tração do concreto para as armaduras de aço, o que é um fenômeno complexo. O concreto situado entre as fissuras ainda apresenta certa capacidade de resistência à tração,

efeito conhecido como *tension-stiffening*. Além disso, o aço das armaduras também apresenta um estado de plastificação quando submetido a uma tensão superior ao seu limite de escoamento, mais um efeito de não linearidade física do material.

Já a não linearidade geométrica (NLG) leva em conta a configuração deformada no equilíbrio de forças da estrutura e/ou a não linearidade das relações deformação específica *versus* deslocamento. No caso de edifícios, a consideração da NLG envolve o estudo da estrutura na sua posição deformada e haverá então interação entre as forças verticais atuantes e os deslocamentos horizontais sofridos pela estrutura, sendo a análise também chamada de análise de segunda ordem global.

Como forma de ilustrar a diferença entre considerações de não linearidade, apresenta-se na Figura 1 um comparativo entre as possíveis considerações na análise de um pórtico de concreto armado. Nota-se que a curva “F”, análise elasto plástica em segunda ordem, é a que melhor descreve o comportamento real do pórtico.

Figura 1-1 - Diferentes tipos de análises em pórtico plano de concreto armado



1.1. JUSTIFICATIVA

Estudos do comportamento não linear físico e geométrico de estruturas de concreto armado podem ser feitos por duas maneiras distintas: ou por meio de ensaios experimentais em laboratório ou a partir de modelos numéricos.

A primeira maneira vem sendo muito utilizada principalmente para se avaliar o comportamento não linear físico de vigas, pilares e pequenos pórticos de concreto armado; no entanto é muito difícil de ser aplicada a estruturas maiores e mais esbeltas, mais suscetíveis aos efeitos de não linearidade geométrica global.

Quanto à segunda maneira, modelos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) são os mais utilizados atualmente para análise não linear de estruturas de concreto armado [Vecchio e Collins (1986), Turner *et al* (1960) *apud* Araripe (1998) e Crisfield (1991)]. Os primeiros modelos de EF foram desenvolvidos na década de 60 e limitavam-se ao estudo de elementos estruturais e pequenas estruturas, utilizando modelos constitutivos simplificados. Mais recentemente, porém, o avanço computacional e o desenvolvimento de modelos constitutivos refinados vêm possibilitando a aplicação de modelos de EF para se analisar com maior precisão e mais rapidamente estruturas maiores, com elevado número de graus de liberdade.

Ainda são poucos os programas comerciais que efetuam análise não linear por elementos finitos de estruturas de CA, sendo o seu custo elevado em comparação com outros programas. Devido a esse fato os modelos refinados de EF estão sendo utilizados primordialmente por pesquisadores e acadêmicos, sendo que muitos pesquisadores optam por desenvolverem seus próprios modelos e programas computacionais. Diversos modelos refinados de EF já foram validados em comparação com ensaios experimentais, sobretudo para elementos isolados de concreto armado – vigas, pilares, ou estruturas de pequeno porte. No entanto, poucos pesquisadores estudaram o comportamento de estruturas de grande porte, levando em consideração tanto a não linearidade física como a geométrica, sendo que a validação dos resultados numéricos em comparação com ensaios experimentais torna-se muito mais difícil em estruturas maiores e mais esbeltas, conforme já comentado. Surge assim a necessidade de se realizar mais estudos para se investigar o efeito das não linearidades física e geométrica em estruturas maiores.

Com relação ao projeto estrutural, ressalta-se a importância dos métodos simplificados para consideração das não linearidades no dimensionamento das estruturas de CA, pois os resultados de uma

análise não linear variam de acordo com as seções e armaduras utilizadas nos elementos, logo um procedimento iterativo seria necessário para o dimensionamento utilizando-se uma análise não linear. Além disso, há várias combinações de carregamento a serem consideradas no projeto. Portanto a análise não linear costuma ser aplicada na verificação de uma estrutura dimensionada por métodos simplificados para uma certa combinação de carregamento. Uma outra questão é o uso correto de programas de EF para a análise não linear de estruturas de CA e a interpretação correta de seus resultados, o que requer um conhecimento específico sobre NLF e NLG, dos modelos constitutivos dos materiais, problemas de convergência dos processos iterativos para solução das equações de equilíbrio não lineares, etc. Tal conhecimento nem sempre está ao alcance da maioria dos projetistas estruturais, tendo em vista que costuma ser ministrado apenas em cursos de pós-graduação.

Como consequência, recentemente métodos simplificados para consideração da NLF e NLG vêm sendo introduzidos em programas comerciais no Brasil, tais como o Eberick (AltoQi) e o Sistema CAD/TQS (TQS Informática), utilizados por projetistas. Assim sendo também se justifica o estudo da análise não linear de pórticos de CA para auxiliar os projetistas no entendimento do comportamento não linear dos pórticos, do espraçamento das não linearidades ao longo dos elementos e da redistribuição de esforços decorrente, bem como a importância do desenvolvimento de programas com modelos não lineares refinados para verificação ou desenvolvimento de métodos simplificados.

Apesar de que modelos de barra tridimensionais (3D), ou pórtico espacial, serem mais adequados para a modelagem de edifícios de concreto armado, modelos de pórticos planos também costumam ser utilizados para modelar pórticos usados como estrutura de contraventamento em edifícios. Foi desenvolvido na UFSC um modelo computacional de elementos finitos de barra bidimensional (2D) para a análise não linear de vigas e pórticos planos de concreto armado (Stramandinoli, 2007). Este modelo foi implementado no programa denominado ANALEST, desenvolvido na linguagem FORTRAN 90 (Chimello, 2003 e Stramandinoli, 2007), tomando como base o programa NOPLAN (La Rovere, 1990). Foram implementados no programa tanto o elemento de barra de Bernoulli, que despreza o efeito da deformação por cisalhamento, como o de Timoshenko, que considera este efeito. O programa ANALEST foi verificado em comparação com ensaios experimentais realizados em diversos laboratórios do Brasil e de

outros países, apresentando boa correlação para vigas bi-apoiadas, vigas contínuas e pórticos planos de CA. Ressalta-se, porém, que todos os pórticos planos analisados eram de pequeno porte, com no máximo dois pavimentos, sendo analisada primordialmente a não linearidade física das estruturas. Apenas para dois pórticos planos foi feita a verificação da não linearidade geométrica do modelo do ANALEST em comparação com modelo analítico de outro autor, considerando material elástico linear, e não foram verificadas estruturas com ambos os efeitos de não linearidade, física e geométrica. Falta assim uma verificação mais ampla do programa ANALEST para que possa ser utilizado na análise de pórticos planos de CA genéricos, inclusive os de grande porte, com número elevado de pavimentos. Como são raros os ensaios experimentais disponíveis na literatura em pórticos de grande porte, que apresentem efeitos combinados de não linearidade física e geométrica, esta verificação deve ser feita comparando-se os resultados do ANALEST com resultados numéricos de modelos e ou programas desenvolvidos por outros autores.

1.2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral estudar o comportamento não linear de pórticos planos de concreto armado levando em conta tanto a não linearidade física como a geométrica, utilizando como base o modelo de barra bidimensional de elementos finitos do programa ANALEST.

Como objetivos específicos previstos no trabalho, têm-se:

- estudar a formulação das não linearidades física e geométrica que foram utilizadas no modelo do programa ANALEST;
- fazer um estudo de modelagem para a escolha de alguns parâmetros a serem usados no modelo do programa ANALEST;
- avaliar a estabilidade numérica dos algoritmos de resolução de equações não lineares implementados no programa ANALEST;
- validar o programa ANALEST, verificando seus resultados com os obtidos por modelos e programas desenvolvidos por outros autores para diversos exemplos de pórticos, com diferente número de pavimentos;
- analisar diversos exemplos de pórticos planos com o programa ANALEST, variando o número de pavimentos, para investigar a influência das não linearidades, isoladas e combinadas, no

comportamento estrutural e o espraçamento da não linearidade física ao longo dos elementos;

- para diversos exemplos de pórticos, avaliar os resultados obtidos pelo modelo do ANALEST com os obtidos por meio de um modelo que considera a não linearidade física simplificada, usando o programa SAP2000.

1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta os conceitos básicos de não linearidade física e geométrica em estruturas de concreto armado, com ênfase nos procedimentos simplificados para consideração das não linearidades contidos na NBR-6118/2007.

O capítulo 3 apresenta uma compilação de informações de trabalhos já realizados na área de análise numérica com o Método dos Elementos Finitos em estruturas de concreto armado, com ênfase na análise de pórticos planos.

No capítulo 4 apresenta-se o modelo de análise não linear implementado no programa ANALEST, incluindo-se os modelos constitutivos adotados, considerações da não linearidade geométrica, e métodos de solução das equações não lineares.

Em seguida, no capítulo 5, são analisados diversos exemplos de pórticos planos usando o programa ANALEST. Inicialmente realizam-se comparações dos resultados obtidos com o modelo do ANALEST com os obtidos por modelos e programas desenvolvidos por outros autores. São feitos estudos a cerca da influência das não linearidades física e geométrica, bem como um estudo do espraçamento da NLF. Finalmente, os resultados do ANALEST são comparados com os de um modelo que considera a não linearidade física simplificada utilizando-se o programa SAP2000.

Finalmente, no capítulo 6, são descritas as considerações finais do presente trabalho e recomendações para trabalhos futuros.

2. NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA

Apresentam-se neste capítulo os conceitos básicos das não linearidades física e geométrica, além das recomendações da NBR 6118/2007 para a consideração simplificada das mesmas.

2.1. NÃO LINEARIDADE FÍSICA

A não linearidade física é causada pelo comportamento não linear do material, sendo este, no caso do concreto armado, devido às relações constitutivas não lineares do concreto e do aço das armaduras, aos efeitos de fissuração do concreto (os quais geram transferência de tensões entre aço e concreto), além dos efeitos de retração e fluência do concreto.

Em uma análise por elementos finitos a NLF pode ser considerada por meio de diagramas momento *versus* curvatura das seções, ou por divisão das seções das peças em lamelas, associadas a diagramas tensão *versus* deformação dos materiais.

Como a implementação numérica de todos os efeitos citados é trabalhosa, e nem sempre os projetistas têm programas de elementos finitos disponíveis, procedimentos alternativos mais simples foram criados, de forma a aproximar o comportamento físico da estrutura esperado.

O item 15.7.3 da NBR-6118/2007 prevê a forma de considerar a não linearidade física no momento da análise de segunda ordem global da estrutura. Os valores indicados correspondem a uma simplificação e são aplicados em estruturas reticuladas de, no mínimo, quatro andares. O princípio desses valores é a redução específica da rigidez de cada tipo de elemento estrutural, baseado no seu nível de fissuração.

- Lajes: $(EI)_{\text{sec}} = 0,3E_{\text{ci}}I_c$
- Vigas: $(EI)_{\text{sec}} = 0,4E_{\text{ci}}I_c$ para $A'_s \neq A_s$ e
 $(EI)_{\text{sec}} = 0,5E_{\text{ci}}I_c$ para $A'_s = A_s$
- Pilares: $(EI)_{\text{sec}} = 0,8E_{\text{ci}}I_c$

A Norma ainda recomenda, que quando a estrutura de contraventamento for eminentemente uma combinação de vigas e pilares e o coeficiente γ_z for inferior a 1,3, seja utilizada uma redução única para a estrutura:

- $(EI)_{\text{sec}} = 0,7E_{ci}I_c$

Importante destacar que a recomendação da consideração da NLF simplificada pela NBR 6118/2007 no momento da análise de 2º ordem faz referência à redução da rigidez das peças sobre o produto da inércia bruta pelo módulo de elasticidade tangente inicial. Não é utilizado o módulo secante nesse ponto da análise por se tratar de uma aproximação de um valor estimado, podendo provocar um erro acumulado caso fosse utilizado.

Os valores dos módulos de elasticidade tangente inicial e secante são apresentados na Norma com os seguintes valores, respectivamente:

$$E_{ci} = 5600 f_{ck}^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} \quad (2)$$

Sendo:

f_{ck} : resistência característica à compressão do concreto

Lima (2001) ainda ressalva que essa redução única da rigidez ação ignora os diferentes comportamentos dos elementos estruturais e superestima a rigidez das vigas, procedimento que pode levar a situações extremas (avaliando a estrutura como de nós fixos) caso as vigas sejam parte expressiva do contraventamento.

É válido relatar que MacGregor (1993) afirma que os deslocamentos laterais sofridos por um pórtico são função da rigidez de todos os seus membros, portanto os valores de rigidez usados na análise devem se aproximar da média de todos os valores individuais dos elementos isolados. Porém, quando analisada uma peça individualmente, o valor de rigidez adotado deve ser menor, fornecendo um limite de segurança na análise.

Citando MacGregor (1993), o conceito ideal de redução da rigidez das peças num momento de uma análise de segunda ordem, é que ele represente o estado do material exatamente no momento antes da ruptura do elemento. Porém, é uma postura consideravelmente conservadora admitir a inércia da seção fissurada no cálculo da rigidez, isso porque nem todas as regiões da peça apresentam esse estado.

2.2. NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Quando o equilíbrio da estrutura é realizado na configuração deformada, os deslocamentos horizontais interagem com as forças atuantes e geram novos esforços. Este efeito, também chamado de efeito de segunda ordem, ocorre em todas as estruturas, porém, nem sempre é importante levá-lo em conta, existindo casos aonde os novos esforços não chegam a ter um valor significativo.

Uma análise com a NLG considerada é conhecida como análise de Segunda Ordem, sendo contemplada na NBR 6118/2007, sendo o capítulo 15 dedicado à instabilidade e aos efeitos de segunda ordem em estruturas de concreto armado.

As premissas indicadas para a execução dessa análise compreendem, principalmente, na obrigatoriedade da consideração da não linearidade física dos materiais envolvidos, além de orientações a cerca da deformabilidade, verificações e incertezas características da estrutura.

A NBR 6118/2007 utiliza a classificação da deslocabilidade dos nós para regular a consideração das não linearidades da estrutura, podendo ser considerada de nós fixos ou nós móveis. Apenas quando classificada como de nós móveis, a estrutura precisa ter as não linearidades, física e geométrica, consideradas obrigatoriamente no cálculo. Quando classificada como de nós fixos, essas não linearidades podem ser desprezadas no cálculo.

A classificação dos nós da estrutura é feita de forma simplificada, analisando o efeito da parcela dos efeitos de segunda ordem nos esforços finais.

A NBR 6118/2007, no item 15.5, indica que os efeitos de segunda ordem podem ter sua importância avaliada com base em parâmetros de classificação, sendo estes o coeficiente γ_z e o parâmetro α .

O coeficiente γ_z é contemplado no item 15.5.3 da Norma, e foi proposto por Mário Franco e Augusto Vasconcelos em 1991. Sua aplicação engloba estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares e ele utiliza no cálculo valores obtidos na análise de primeira ordem, tais como os deslocamentos horizontais e esforços combinados.

Este coeficiente prevê que se os efeitos de segunda ordem superarem 10% dos efeitos de primeira ordem, a estrutura é classificada como de nós móveis, caso contrário, é classificada como de nós fixos.

É interessante observar que este coeficiente é calculado para cada combinação de esforços na estrutura e a combinação mais crítica é

aquela em que se majora o carregamento vertical, pois são estes que mais influenciam no resultado (Loriggio, 2010).

A estrutura é classificada de nós fixos se o coeficiente se mantiver até 1,1, equação (3):

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (3)$$

onde:

$M_{1,tot,d}$: é a soma dos momentos de primeira ordem de todas as forças horizontais advindas da combinação em questão, em valores de cálculo (ou de projeto, já majorados), em relação à base da estrutura.

$\Delta M_{tot,d}$: é a soma do momento gerado pelas forças verticais na nova posição, da combinação em questão e com valores de cálculo, em relação à posição indeformada da estrutura.

Quando a não linearidade geométrica tem grande influência no cálculo e precisa ser incorporada a ele, esta pode ser aplicada de forma rápida, segundo a NBR 6118/2007, com a possibilidade de utilizar o próprio γ_z como coeficiente multiplicador de esforços, caso seu valor não ultrapasse 1,3, aplicando-o sobre os esforços horizontais obtidos numa análise de primeira ordem.

O parâmetro de instabilidade α é previsto no item 15.5.1 da NBR-6118/2007, e utiliza a criação de um pilar fictício de seção constante, engastado na base, com uma rigidez equivalente, que sofre o mesmo deslocamento lateral do pórtico estudado. A fórmula é a que segue:

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{(E_{cs} I_c)}} \quad (4)$$

O limite do parâmetro para se considerar estrutura de nós fixos, chamado α_1 , varia com a quantidade de andares do pórtico estudado:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,2 + 0,1n & \text{se } n \leq 3 \\ \alpha_1 &= 0,6 & \text{se } n \geq 4 \end{aligned}$$

onde

n : número de andares acima da fundação.

H_{tot} : altura total da estrutura.

N_k : soma de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (valores característicos).

$E_{cs}I_c$: valor de rigidez de um pilar equivalente com mesmo deslocamento lateral que o pórtico estudado.

O valor limite do parâmetro para estruturas com mais de 4 pavimentos deve ser reduzido para $\alpha_1 = 0,5$ no caso de contraventamento formado apenas por pórticos.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentados resultados e recomendações de autores que já realizaram pesquisas sobre não linearidade física e geométrica em estruturas de concreto armado. Os estudos estão separados em pórticos e em outras estruturas, vigas e pilares, estudados isoladamente. Suas contribuições são importantes para criar a base conceitual para os novos estudos do presente trabalho.

3.1. ESTUDOS ANTERIORES EM PÓRTICOS COM NLF E NLG

O relato de estudo de não linearidade em pórtico plano mais antigo encontrado foi de Aas-Jakobsen (1973) *apud* Araripe (1998), na década de setenta, que apresentou um modelo de elemento finito para pórticos planos de concreto armado com não linearidade geométrica. A rigidez secante era usada, bem como o conceito de rotação moderada de modo simplificado.

Barbosa (1978) *apud* Stramandinoli (2007) estudou pórticos planos de concreto armado onde a seção das peças foi dividida em dez camadas. No modelo foram considerados os efeitos da fissuração, da não linearidade à compressão e a não linearidade do aço por meio de alterações nos módulos de elasticidade das camadas de concreto e redistribuição das tensões.

Holzer *et al.* (1979) *apud* Stramandinoli (2007) estudaram a não linearidade física e geométrica em elementos de vigas e colunas de concreto armado. A formulação utilizada previa um elemento de barra com dois nós extremos com três graus de liberdade, e um nó interno com um grau de liberdade. O modelo foi deduzido com considerações de pequenos deslocamentos. O programa foi testado também com pórticos de concreto armado para descrição do histórico de carga *versus* deslocamento.

Mirza *et al.* (1981) consideraram o concreto como material elasto plástica perfeito. É considerada também uma redistribuição dos momentos fletores com base na capacidade de giro de rótulas plásticas implementadas no modelo. O programa tem a capacidade de fornecer dados de carga *versus* deslocamento, além da localização e sequência de formação das rótulas plásticas até a formação do mecanismo de colapso.

Mari (1984) realizou análises numéricas de pórticos espaciais com os dois tipos de não linearidade. Foi utilizada a discretização por camadas das seções, sendo que se admitia no modelo que cada camada estava submetida a um estado uniaxial de tensões e o cisalhamento era

desprezado. O elemento de barra utilizado possuía treze graus de liberdade, sendo seis para cada um dos nós da extrema da barra e um para o nó interno. A matriz constitutiva era avaliada em uma única seção, no meio do vão do elemento.

Dixon (1985) *apud* MacGregor (1993) estudou pórticos de concreto armado testados experimentalmente. Sua conclusão foi a redução única para $0,5 E_{ci} I_c$ para vigas e pilares, de forma a representar os resultados obtidos experimentalmente.

Espion (1986) utilizou um modelo com nove graus de liberdade para estudar pórticos planos de concreto armado e de aço. O campo de deslocamentos transversal era descrito por um polinômio de quarta ordem e para o deslocamento axial era usado um polinômio de terceira ordem. O modelo ainda previa a não linearidade geométrica com pequenas deformações, enquanto a deformação por cisalhamento foi desprezada.

Pimenta e Soler (1989) *apud* Stramandinoli (2007) utilizaram o elemento de barra para pórtico plano desenvolvido por Pimenta (1988) *apud* Stramandinoli (2007), em formulação corrotacional, para o estudo de estabilidade em pórticos, onde os nós podem sofrer grandes deslocamentos e rotações e a barra pode apresentar grandes alongamentos e curvatura. Para o comportamento não linear do concreto era admitida a relação tensão-deformação proposta na NBR 6118/2003, enquanto que o aço era considerado um material elasto plástico perfeito.

El-Metwally e Chen (1989) estudaram a não linearidade geométrica, não linearidade física e a rigidez das ligações em pórticos planos de concreto armado. A NLG foi considerada local e globalmente, sendo esta última por meio da atualização das coordenadas dos nós da estrutura a cada iteração da solução. Para a NLF, a curva tensão-deformação do concreto sob compressão foi adotada de outros autores e o aço foi admitido com comportamento elasto plástico perfeito. Ainda, deformações de cisalhamento foram ignoradas, assim como a contribuição do concreto à tração. As ligações viga-pilar foram admitidas como uma mola de rotação.

Vecchio e Balopoulou (1990) testaram experimentalmente um pórtico de vão simples e dois andares submetido a uma carga concentrada monotonicamente crescente no meio do vão da viga do primeiro pavimento. Os efeitos de não linearidade física, tais como *tension-stiffening*, retração e fluência, foram observados e comparados com resultados teóricos de um programa computacional. Os autores não determinaram qual parcela da deformação por cisalhamento contribuiu para o comportamento do pórtico, fizeram, porém uma estimativa da sua

parcela na resposta total. Os efeitos da não linearidade geométrica não foram consideráveis no experimento.

Vecchio e Emara (1992) propuseram um modelo para a consideração da deformação por cisalhamento acoplado à análise não linear de pórticos de concreto armado. A deformação por cisalhamento é definida por meio da compatibilização das forças cortantes nas extremidades dos elementos. Os autores ainda ensaiaram um pórtico de dois pavimentos submetido à carga axial nas colunas e carga horizontal no topo, monotonicamente crescente, para avaliar o potencial do modelo.

Silva (1996) analisou pórticos planos de concreto armado com as considerações de não linearidade geométrica pela teoria de grandes deslocamentos e grandes deformações com a formulação Lagrangeana Atualizada, e a não linearidade física com o método das lamelas ou camadas. O autor usava funções lineares de interpolação para os deslocamentos horizontais e funções cúbicas, diferente dos polinômios de Hermite, para os deslocamentos verticais. A formulação apresentada não fazia restrições quanto à magnitude de deslocamentos e rotações. Vários exemplos de pórticos planos foram analisados, inclusive alguns do autor Ernst *et al.* (1973) *apud* Stramandinoli (2007). De modo geral, os resultados do autor ficaram próximos dos experimentais quando a resistência à tração do concreto não foi considerada no seu modelo. Concluiu ainda que o efeito da fissuração no pórtico de vários pavimentos foi maior em colunas do que em vigas.

Um modelo com ambas as não linearidades foi apresentado por Shuraim (1997) no estudo de pórticos. A formulação Lagrangeana Atualizada foi aplicada, elementos de barra de 6 graus de liberdade e cisalhamento desprezado. O autor testou 2 pórticos planos experimentais, com um pavimento e fez um estudo paramétrico de pórticos para testar as reduções de rigidez do ACI-318. A formulação apresentou bons resultados em relação aos experimentais e concluiu-se que é difícil aplicar um único fator de redução de rigidez nos elementos devido à variação de rigidez ao longo do mesmo.

Araripe (1998) apresentou um estudo da não linearidade física e geométrica de pórticos planos de concreto armado baseado em três modelos de barras de elementos finitos. No primeiro modelo considerou grandes rotações e grandes deformações e nos outros dois foram admitidas rotações moderadas. O autor testou um pórtico plano, com um pavimento, segundo os modelos de rotações moderadas, obtendo bons resultados com as duas hipóteses.

Silva e Matos (2000) consideraram a contribuição do efeito de enrijecimento à tração entre fissuras (*tension-stiffening*) na análise de pórticos, com a seção dos elementos discretizada em lamelas e admitindo grandes deslocamentos e grandes deformações. Um pórtico de quatorze pavimentos foi estudado em diferentes situações, com e sem o efeito de *tension-stiffening*, além de uma análise linear e outra utilizando o processo P- Δ .

Lima (2001) estudou punção em lajes e estabilidade global de edificações de concreto armado. Por seu trabalho ter sido desenvolvido antes da revisão da NBR 6118/2003, várias sugestões e discussões foram levantadas ao longo da dissertação sobre valores e limites propostos na revisão. Interessante notar que a autora sugere inserir um comentário na NBR 6118/2003 que indique o favorecimento da utilização do coeficiente γ_z frente ao parâmetro α , sendo o último mais conservador. Com base nos estudos apresentados, a autora indicou que o acréscimo de momento fletores na base e topo dos pilares apresentam aumento até 25% da altura da edificação, decréscimo até 75% e finalmente, nos 25% restantes da altura, um brando aumento. Ainda, quanto à não linearidade física, a autora defende uma redução de rigidez de $0,5 E_{ci}I_c$ para vigas e uma revisão do valor único de redução de $0,7 E_{ci}I_c$.

Branco (2002) estudou pórticos planos com a formulação de barras baseada nas hipóteses de Timoshenko (efeito de distorção por cisalhamento) e combinando a formulação Lagrangeana Atualizada e o modelo de dano para a consideração da NLF. O autor considerou a aplicação do modelo de Timoshenko mais precisa do que o de Euler-Bernoulli, com ênfase em peças pouco esbeltas ou com módulo de elasticidade transversal pequeno. Ele ressalta ainda a influência que a consideração do cisalhamento teve nos resultados, levando a uma estrutura mais flexível. É comentada ainda a importância de validar os resultados numéricos obtidos com exemplos experimentais, procedimento não realizado no trabalho.

Izzudin *et al.* (2002) concentraram seus estudos em elementos de viga e coluna de pórticos espaciais de concreto armado com consideração da não linearidade geométrica precisa e da não linearidade física simplificada. Na proposta, a primeira análise é feita com um único elemento, sendo a malha refinada nos locais de necessidade de forma automática. A grande vantagem do método é a economia computacional. Qualquer tipo de contribuição à tração do concreto foi desprezada. A análise da resposta da seção transversal é feita com a subdivisão em

“blocos”, onde o confinamento do concreto é considerado e a resposta é função da soma de contribuições do aço e concreto.

Pinto (2002) desenvolveu um programa em linguagem FORTRAN 90 com modelagem em barras, PPNL, e realizou um estudo de estruturas de contraventamento em forma de pórticos planos. O autor desenvolveu uma teoria que engloba deslocamentos e deformações de qualquer ordem de grandeza baseada na hipótese de *Euler-Bernoulli* e formulação corrotacional. O efeito de *tension-stiffening* foi considerado e os elementos foram discretizados em fatias para obter esforços na seção. Os resultados do estudo com um pórtico de 6 pavimento foi considerado mais representativo da realidade; pórticos com diferentes alturas foram estudados também, tendo suas reduções de rigidez no ELU e ELS avaliadas em diferentes taxas de armadura. Para ELS o autor concluiu que pórticos com baixa taxa de armadura o efeito de fissuração é intenso e não há o efeito benéfico das tensões de compressão para a redução das fissuras nos pilares. Para pórticos altamente armados, houve menor variação de rigidez no histórico da estrutura, já que o aço contribui para o combate às fissuras. No ELS as reduções de rigidez obtidas pelos modelos estudados foram todas a favor da segurança se comparadas com recomendações da NBR 6118/2003. Para o ELU os resultados de perda de rigidez foram mais variados, mas ficaram predominantemente a favor da segurança. É defendida ainda a aplicação do γ_z como majorador de esforços de segunda ordem quando seu valor for até 1,2, já que acima desse valor erros entre 5 e 10% foram observados.

Pinto e Ramalho (2002) estudaram os processos simplificados de consideração da NLF e NLG, isoladamente, em edifícios de concreto armado utilizando o *software* LUSAS, versão 11, onde foram utilizados elementos de estado plano de tensão para o concreto. O aço foi representado com elementos de barra, ou seja, foi utilizada a modelagem discreta da armadura. No estudo da não linearidade física, foram estudadas vigas biapoiadas e biengastadas, pilares e pórticos, e, para a não linearidade geométrica, foram usadas edificações reais, modeladas tridimensionalmente. O pórtico estudado com uma análise refinada mostrou que os resultados simplificados de redução $0,6 E_{ci} I_c$ para vigas e $1 E_{ci} I_c$ para pilares na análise de primeira ordem foi o mais preciso. O estudo das edificações mostrou que o coeficiente γ_z é aceitável como majorador de esforços até 1,2. O estudo do acréscimo de momentos fletores em pilares ao longo da altura da edificação mostrou que para trechos inferiores, o acréscimo é menor que o γ_z , no meio da altura da

edificação é maior e no topo os acréscimos são menores que o coeficiente.

Schulz e Reis (2003) *apud* Stramandinoli (2007) analisaram estruturas reticuladas tridimensionais de concreto armado com NLF e NLG. A formulação admite pequenos deslocamentos e pequenas rotações e a solução das equações não lineares é feita a partir do Método do Comprimento do Arco. Os autores utilizaram o elemento de barra com três nós e sete graus de liberdade.

Oliveira (2007) usou o *software* ANSYS para avaliar as não linearidades física e geométrica de pórticos planos, comparando esses resultados com os obtidos usando as simplificações da NBR-6118/2003 e a formulação de Branson (1968). Os pórticos foram modelados por elementos finitos sólidos (de oito nós, com três translações por nó) e as fissuras por meio de um modelo de fissuras distribuídas. No trabalho, o parâmetro β de transferência de tensões cisalhantes também foi adotado. A autora concluiu que para o ELS, a redução da inércia dos pilares para $0,8I_c$ e a utilização da inércia equivalente de Branson (1968) para as vigas apresentou melhor ajuste com o modelo de referência com ambas não linearidades refinadas do programa ANSYS. Para o ELU, a redução de inércia da NBR-6118/2003, $0,8I_c$ para os pilares e $0,4I_c$ para as vigas, apresentou em grande parte dos casos boa aproximação com o modelo de referência. A mesma autora (Oliveira, 2002) modelou edifícios tridimensionais, considerando os efeitos de segunda ordem por meio de uma análise precisa, a não linearidade-física aplicada de forma simplificada. Os parâmetros simplificados α e γ_z foram determinados como forma de comparação. A autora concluiu que seria mais recomendável utilizar o coeficiente γ_z integral como multiplicador de esforços do que o valor $0,95\gamma_z$, considerando o acréscimo médio obtido nas análises. Ela ainda comentou que foram observadas regiões em que mesmo a aplicação integral do coeficiente estaria contra a segurança.

Stramandinoli (2007) desenvolveu e estudou modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de estruturas reticuladas planas de concreto armado, implementando-os no *software* ANALEST. Foram desenvolvidos modelos de barra com 3 nós e 7 graus de liberdade, tanto com a hipótese de Euler-Bernoulli como com a hipótese da viga de Timoshenko. Foi testado também um modelo misto com elemento plano híbrido na ligação viga-pilar de pórticos. A autora também propôs, em conjunto com a orientadora, um novo modelo constitutivo para representar o efeito de *tension-stiffening* do concreto armado, que se mostrou eficiente e de fácil implementação computacional (Stramandinoli e La Rovere, 2008). Os modelos de não

linearidade física do programa ANALEST foram validados em comparação com resultados experimentais, realizados no Brasil e no exterior, de diversas estruturas, sendo 19 vigas biapoeadas, 9 vigas contínuas e 13 pórticos planos, obtendo boa correlação com resultados de carga última, curvas carga versus deslocamento e espreiamentos das não linearidades físicas. O modelo de barra com hipótese de Euler-Bernouli obteve ótimos resultados para as estruturas submetidas predominantemente a esforços de flexão, com armaduras de estribos dimensionadas para resistir com segurança aos esforços de cisalhamento. Para estruturas com baixa taxa de armadura transversal e para o caso de vigas contínuas, em que no(s) apoio(s) central(is) há comportamento de flexão e cisalhamento combinados, o modelo de Timoshenko apresentou uma melhor correlação com resultados experimentais. O modelo misto testado mostrou-se mais rígido do que o de barras de Euler-Bernoulli, devido ao uso do elemento plano na ligação, sendo então indicado apenas para os casos de vigas e pilares de dimensões mais significantes, ou para estruturas submetidas a cargas cíclicas. Apenas para dois pórticos planos foi feita a verificação da não linearidade geométrica do modelo do ANALEST em comparação com modelo analítico de outro autor, considerando material elástico linear, e não foram verificadas estruturas com ambos os efeitos de não linearidade, física e geométrica.

Gomes *et al.* (2008) fizeram uma compilação de resultados de estudos de pórticos planos de concreto armado e procedimentos de cálculo considerando análises elásticas, procedimentos simplificados e rigorosos da análise NLF e NLG. Os autores concluíram que os processos simplificados representam satisfatoriamente as análises rigorosas, respeitando-se porém os coeficientes indicados por Norma. Os autores ainda indicam uma ressalva quanto a edificações altas, onde os efeitos de segunda ordem tomam proporção considerável na influência dos resultados.

Sanches (2009) estudou pórticos de concreto armado com a consideração da não linearidade física e considerando a estrutura como geometricamente linear. A formulação do MEF admitia modelo uniaxial de barra. Nos modelos constitutivos adotados foi considerado que o concreto tinha resistência nula à tração e a relação tensão-deformação do aço foi considerada bilinear com encruamento, minorando problemas de convergência do modelo. Vale ressaltar que o autor avaliou apenas um pórtico plano de um pavimento e outro com três pavimentos, sendo que nenhum foi testado experimentalmente, comparando resultados entre o modelo proposto e o programa computacional ATENA. O resultado do

modelo desenvolvido se ajustou satisfatoriamente aos resultados do programa ATENA, ressaltando o início do carregamento, quando o modelo proposto foi menos rígido por não considerar a contribuição à tração do concreto. O autor ressaltou ainda o grande esforço computacional do programa com o modelo proposto.

Alva e Kaminski Junior (2009) analisaram os efeitos da fissuração das peças de concreto armado sobre os efeitos globais de segunda ordem no pórtico plano central de uma edificação com 12 andares. A modelagem foi realizada com elementos de barra. Os resultados foram comparados com as recomendações simplificadas da NBR 6118/2003. A não linearidade física foi implementada de acordo com modelos constitutivos da Mecânica do Dano e a não linearidade geométrica segundo a formulação Lagrangeana Atualizada. Na comparação dos deslocamentos horizontais, a simplificação da NBR 6118/2003 foi mais conservadora, resultando em valores maiores de deslocamentos. As observações dos rearranjos de esforços dentro da estrutura não foram capturadas pelo modelo simplificado de não linearidade da NBR, pois este emprega a redução de inércia em todos os elementos. Como consequência, partes da estrutura ficam mais fissuradas e outras, por estarem menos, ficam sujeitas a receber maiores esforços, ou seja, o comportamento estrutural do pórtico não é bem descrito pela citada Norma.

Araújo (2010) estuda valores nominais de rigidez de pilares, pilares-parede e vigas para a utilização do parâmetro α e coeficiente γ_z . Na não linearidade física, é considerado o efeito de *tension-stiffening*. O autor discute o coeficiente β , compreendido entre 0 e 1, de relação entre as rigidezes secante específica de um elemento estrutural e a rigidez secante geral $E_{cs}I_c$ do concreto. O autor apresenta a dedução do parâmetro α e do coeficiente γ_z , defendendo os dois processos como convenientes para avaliação dos esforços de 2º ordem. Assim, o autor indica que a rigidez secante para pilares deveria ser 70% da rigidez secante do concreto, enquanto que para vigas deveria se adotar 30 ou 35%. Os estudos de pórticos realizados informaram que a inércia da seção das vigas era metade da dos pilares; mostrou-se ainda que quanto maior o número de pilares no pórtico, menor o seu esforços axial e maior o deslocamento médio sofrido por cada andar.

Carvalho (2010) estudou a não linearidade geométrica em vigas de concreto armado aplicando a formulação corrotacional ao modelo de elementos finitos. A dedução das matrizes de rigidez do modelo de barra utilizado foi feito por meio da energia de deformação, separando a parcela referente ao esforço axial e à flexão. O autor ainda desenvolveu

uma rotina no *Matlab* para o cálculo da rotação de corpo rígido e esforços internos sem vigas com diferentes metodologias, fazendo sua aferição com o *software* ANSYS. A versão do algoritmo que calcula diretamente os esforços internos a partir do alongamento e rotações foi a que apresentou maior rapidez de convergência e precisão dos resultados, no caso da formulação corrotacional. Esses resultados se verificaram tanto para vigas quanto para o pórtico analisado.

Com base na revisão bibliográfica de pórticos de concreto armado, nota-se que o desenvolvimento da sua análise desde a década de 70 experimentou diversos avanços na análise numérica. Modelos mais precisos para representação do efeito de segunda ordem foram admitidos, bem como da não linearidade física do material, possibilitaram a melhoria na previsão de limites de fissuração, carga de ruptura e histórico carga *versus* deslocamento.

Como exemplo desse avanço é possível citar o pórtico experimental de Ernst *et al* (1973) *apud* Stramandinoli (2007) modelado por Silva (1996) e Stramandinoli (2007). O primeiro autor indicou uma diferença de 10% entre resultados numérico e experimental para carga última. A segunda autora, identificando o pórtico como “A40”, obteve uma diferença de apenas 2,8% entre o resultado numérico do modelo desenvolvido em sua pesquisa e o resultado experimental obtido para carga última.

Ressalta-se ainda que nesta revisão bibliográfica, observaram-se algumas divergências entre resultados obtidos por alguns pesquisadores. Por exemplo, os estudos de Lima (2001) e os de Pinto e Ramalho (2002) chegaram a conclusões opostas quanto ao comportamento dos momentos de segunda ordem ao longo da altura de edificações.

Assim sendo, apesar dos avanços alcançados na análise numérica não linear de estruturas de concreto armado nas últimas décadas, mais estudos ainda se fazem necessários para aprimorar os modelos numéricos e ampliar o conhecimento sobre efeitos não lineares nesse tipo de estruturas.

3.2. ESTUDOS ANTERIORES EM VIGAS, PILARES E OUTRAS ESTRUTURAS COM NLF E NLG

Turner *et al.* (1960) *apud* Araripe (1998) foram indicados como os introdutores da modelagem com não linearidade geométrica. Dois anos depois, Gallagher *et al.* (1962) *apud* Araripe (1998) adicionaram a não linearidade física nos modelos numéricos, considerando os materiais elasto plásticos.

Argyris (1965) *apud* Silva (1996) estudou a não linearidade, física e geométrica, na formulação do Método dos Elementos Finitos no texto “Contínua e Descontínua”.

Kordina (1972) e Hage (1974) *apud* MacGregor e Hage (1977) estudaram resultados diversos de vigas e pilares de pórticos quando submetidos a vários tipos de carregamentos e ao observar a variação de rigidez que estes apresentaram, concluíram que os valores convergiam para $0,4 E_{ci}I_c$ em vigas, $0,8 E_{ci}I_c$ em pilares. Para Franco (1997) *apud* Lima (2001), o valor de redução para as lajes seria de $0,3 E_{ci}I_c$ ficando próximo da indicação de um trabalho de MacGregor (1993), que concluiu um valor de $0,25 E_{ci}I_c$.

Furlong (1980) *apud* MacGregor (1993) estudou a perda de rigidez de vigas com seção “T” e pilares. O autor apontou que a rigidez deveria ter o valor de $0,5 E_{ci}I_c$ nas vigas estudadas e os pilares teriam o valor de $0,6 E_{ci}I_c$ nos pavimentos inferiores e $0,3 E_{ci}I_c$ no restante.

McDonald (1986) *apud* MacGregor (1993) também estudou vigas com seção “T” chegando à conclusão que sua rigidez efetiva deveria ser $0,42 E_{ci}I_c$. Seu estudo de lajes unidirecionais levou ao valor de $0,2 E_{ci}I_c$ enquanto que para pilares, $0,7 E_{ci}I_c$ foi o valor recomendado.

Rasheed e Dinno (1994(a) e 1994(b)) propuseram um modelo de análise não linear física onde a relação tensão-deformação do concreto sob compressão era descrito por um polinômio de quarto grau, sendo considerado o confinamento pelos estribos. O concreto submetido à tração era descrito por uma relação que combinava os efeitos de *tension-stiffening*, *tension-softening* (amolecimento à tração) e o efeito de *bond slip*, todos com trechos lineares. Já o aço era descrito por uma curva bilinear, com encruamento. O cisalhamento foi desprezado no modelo.

Ovunc e Ren (1996) fizeram a análise não linear física e geométrica de uma treliça, com a NLF descrita por funções contínuas aproximadas das relações tensão-deformação dos materiais, sendo que a alteração dos parâmetros das funções caracteriza determinado material. Já a NLG foi incluída por meio da formulação Lagrangeana Atualizada.

Pinto e Ramalho (2002) estudaram as variações de rigidez em diferentes elementos com diferentes condições de apoio. Para vigas biapoiadas, o valor da rigidez variou de $0,4$ a $0,6 E_{ci}I_c$, gerando uma média de $0,5 E_{ci}I_c$ para a rigidez efetiva da viga. Já para vigas biengastadas o valor de rigidez foi de $0,6$ até $0,64$, conferindo o valor médio de $0,62 E_{ci}I_c$ para a rigidez com esse tipo de apoio. Os autores sugerem então o valor médio de $0,55 E_{ci}I_c$ para as vigas, para retratar uma condição próxima da realidade, onde a ligação é uma condição entre o apoio e o engaste.

Quanto à redução dos pilares, os autores estudaram essas peças considerando um modelo engastado na base e livre no topo. Os autores comentam que existe vantagem em se adotar valores diferentes para a redução da inércia nos pilares em níveis diferentes da edificação, já que a relação momento fletor *versus* esforço normal varia com a altura.

Os mesmos autores, Pinto e Ramalho (2002), estudaram a NLG analisando estruturas de concreto armado e admitindo uma redução da rigidez dos elementos como método simplificado para NLF. Vinte e cinco edificações foram modeladas e tiveram seus efeitos de segunda ordem estudados separados por tipo de ação estrutural.

Foi mostrado que ao longo da altura de uma estrutura, a utilização do γ_z como fator de majoração de esforços não corresponde fielmente à realidade. A variação ao longo da altura da estrutura é grande e os autores recomendam não fazer uso desse artifício simplificado se o valor do parâmetro passar de 1,2.

D'Avila (2003) fez um estudo sobre a modelagem de fissuração do concreto simples e do concreto armado, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a modelagem espacial da estrutura. Para a avaliação não linear de vigas por meio do MEF, a autora utilizou elementos finitos submetidos a estado plano de tensão, comparando o modelo distribuído com o modelo incorporado de fissuração. A autora indica que o modelo distribuído é eficiente na visão global das peças onde não há a predominância de uma fissura, enquanto que o modelo incorporado é mais efetivo em casos onde existia fratura localizada no elemento. Apesar de os dois apresentarem formulações diferentes, ambos conseguiram representar o comportamento de peças de concreto armado em situações de tração e flexão pura.

Machado *et al.* (2007) estudaram um modelo de fissuração em vigas de concreto armado por meio do Método dos Elementos Finitos. O concreto foi considerado submetido a um estado plano de tensões e a perda de seção do mesmo foi reproduzida com base no modelo de fissuras distribuídas. A armadura foi modelada discretamente, admitindo-se aderência perfeita entre os materiais.

Neto (2007) realizou um estudo de aderência entre concreto e aço em vigas por meio do MEF, usando elementos sob estado plano de tensão, utilizando um modelo distribuído para as fissuras. São usados dois critérios de formação de fissuras, o critério da resistência e o critério da energia de fratura, sendo possível a escolha de um deles no momento da análise a partir da janela de entrada de dados do programa. Os modelos analisados foram comparados com resultados experimentais

e apresentaram uma melhor aproximação, se comparados com resultados de outros estudos numéricos disponíveis na literatura.

Gamino *et al.* (2008) compararam modelos de elementos finitos planos com fissuração rotacional distribuída e o modelo previsto na NBR 6118/2003 para avaliar a abertura de fissuras em vigas. Os autores utilizaram o *software* FEMOOP e um pós processador GID para complementar a análise de resultados do modelo numérico de elementos finitos. O modelo constitutivo aplicado para o concreto foi o modelo de Ottosen, por se tratar de uma modelagem bidimensional. Concluiu-se que as tensões axiais na armadura destinadas a suportar a tração, obtidas a partir do método da NBR 6118/2003, foram superiores aos valores obtidos numericamente, provando o conservadorismo da referida Norma. Os métodos adotados para avaliar a abertura de fissuras mostraram-se dentro do limite de abertura indicado na mesma Norma.

Matzenbacher *et al.* (2010) concentraram-se em estudos de ensaios de vigas que sofreram ruptura por corte e flexão, sendo modeladas por elementos finitos de estado plano de tensão. Os materiais, tanto o concreto quando o aço, foram considerados elasto plásticos e para a fissuração foi utilizado um modelo distribuído. Os autores consideraram o efeito de *tension-stiffening* e de *tension-softening* no modelo, admitindo uma curva suave no ramo descendente do gráfico tensão-deformação do concreto, simulando a perda de resistência gradativa à tração. Foram testadas 16 vigas, sendo que, na análise do gráfico carga-deslocamento, mostrou-se que, tanto para casos de ruptura por flexão como de ruptura por cisalhamento, o modelo implementado forneceu resultados satisfatórios em comparação aos experimentais.

3.3. CONSIDERAÇÕES DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica realizada apresentou um complemento e atualização da revisão de Stramandinoli (2007), dando maior ênfase a pórticos planos em análise não linear. Os trabalhos foram citados não apenas para avaliar novas opções de implementação, mas também para mostrar outras abordagens dos problemas em questão.

Os dois itens anteriores, 3.1 e 3.2, mostram que o formato atual do programa ANALEST está de acordo com as necessidades do estudo proposto, pois a quantidade de graus de liberdade é limitante na eficiência computacional do modelo de pórtico.

A bibliografia mostra que modelos de fissura incorporada apresentam ótimos resultados para peças de concreto armado, tanto em

tração quanto em flexão pura, permitindo a fratura se propagar em qualquer direção sem dependência da malha de EF. Porém, esta modelagem é aplicada a elementos planos apenas (D'Ávila, 2003). A utilização deste tipo de elemento em pórticos planos resulta em uma grande quantidade de nós, consequentemente de graus de liberdade, tornando a modelagem mais trabalhosa e a análise do modelo mais lenta. Outra formulação que tem apresentado bons resultados na análise da NLG é a Formulação Corrotacional – Pimenta (1988), Pinto (2002), Belo (2009) e Carvalho (2010). O seu princípio é a separação do eixo de referência do sistema em dois, para separar os movimentos de corpo rígido (eixo fixo) dos associados à deformação (eixo corrotacional), permitindo que esse tipo de descrição suporte grandes deslocamentos e deformações. No entanto, pórticos planos de concreto armado não apresentam em geral grandes rotações, de forma que a formulação Lagrangeana Total utilizada por Stramandinoli (2007,) que admite rotações moderadas, é suficiente para capturar o comportamento não linear geométrico dos pórticos. Ademais, segundo Belo, (2009) nos modelos que utilizam a formulação corrotacional, deve-se utilizar em geral uma malha fina para se obter bons resultados, ou seja, resulta em modelos com número de nós e graus de liberdade elevado, o que não é eficiente para a análise de pórticos de grande porte.

Quanto à avaliação da redução de rigidez em peças de concreto armado há uma significativa variação das recomendações na bibliografia específica, situação também apontada por Alva *et al* (2010).

Vale ressaltar que Stramandinoli (2007) já obteve com o ANALEST ótimos resultados em comparação com ensaios experimentais de vigas biapoiadas, e bons resultados para pequenos pórticos planos em comparação com modelos analíticos de outros autores e ensaios experimentais, indicando assim o potencial de utilização deste programa para estruturas maiores.

No próximo capítulo apresenta-se com detalhes a formulação matemática do modelo numérico de elementos finitos, implementado no programa ANALEST, a ser utilizado neste trabalho para análise não linear física e geométrica de pórticos planos de CA.

4. MODELO NÃO LINEAR DE ELEMENTOS FINITOS PARA PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO

Os modelos numéricos que usam o Método dos Elementos Finitos são os mais utilizados para discretizar estruturas quando soluções exatas não podem ser obtidas facilmente.

Pilares e vigas de concreto armado são elementos tridimensionais, porém podem ser tratados como elementos lineares por apresentarem uma dimensão preponderante em relação às outras duas. Essa simplificação permite que teorias sejam formuladas e implementadas mais facilmente e sejam mais bem aceitas no ambiente profissional de dimensionamento estrutural. Assim, neste trabalho, os pórticos planos de concreto armado serão modelados por elementos finitos lineares ou de barras.

4.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O princípio básico do Método dos Elementos Finitos (MEF) é a divisão do meio contínuo ou corpo sólido em um número conveniente de elementos, ligados em suas extremidades por nós. O campo de deslocamentos (ou de tensões) dentro de cada elemento é aproximado por funções, em geral polinomiais, que interpolam os valores de deslocamentos (ou tensões) nodais. Neste trabalho, será adotada a formulação em termos de deslocamentos, que corresponde à formulação do Método dos Deslocamentos da Análise Matricial de Estruturas. Após a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de forças equivalentes de cada elemento, pode-se aplicar a metodologia de Análise Matricial para formar a matriz de rigidez e o vetor de forças da estrutura, formando assim o sistema algébrico de equações de equilíbrio de forças da estrutura, cuja solução fornece os deslocamentos nodais de cada elemento. A partir desses deslocamentos nodais, e das funções de interpolação internas de cada elemento, pode-se obter os deslocamentos em qualquer ponto dentro da estrutura e, a partir destes, as deformações específicas e tensões (La Rovere, 2002).

Nota-se que a estrutura em estudo torna-se simplificada, assim a solução do método é dependente do número de divisões ou de elementos. Quanto maior a quantidade de elementos utilizados, mais próximo se estará da solução exata, desde que atendidas as condições de convergência do método (La Rovere, 2002). Reside nesse ponto um dos fatores de correta utilização do método. Mais elementos levam a maior precisão e também a um maior custo de processamento do cálculo.

Existe um refinamento ideal para cada tipo de estrutura em cada situação, onde a solução obtida é satisfatória e o tempo gasto no cálculo não é desperdiçado. No caso de análise não linear, também é importante levar em conta na discretização o espraçamento das não linearidades do material.

Os estudos do presente trabalho serão realizados com modelo de barra baseado nas hipóteses de *Euler-Bernoulli*, resumidas a seguir:

- as seções planas permanecem planas e ortogonais à linha neutra após a deformação (hipótese de *Euler-Bernoulli*), portanto os efeitos da deformação por cisalhamento não são considerados;

Em sua tese, Stramandinoli (2007) implementou a formulação de NLG e aprimorou a formulação de NLF no programa ANALEST, iniciada por Chimello (2003), incluindo também elementos baseados na hipótese de Timoshenko, que leva em conta a deformação por cisalhamento. Stramandinoli (2007) indicou a concordância entre os resultados experimentais e os obtidos pelo programa ANALEST, com o modelo de *Timoshenko*, para pórticos com baixa taxa de armadura. Porém, quando este não for o caso, a autora recomenda o modelo de barra de *Euler-Bernoulli* por fornecer bons resultados e exigir um esforço computacional menor. Assim sendo, neste trabalho não será utilizado o modelo de *Timoshenko*, pois serão estudados exemplos de pórticos planos com comportamento dominante de flexão.

No elemento clássico de barra de pórtico de dois nós, com três graus de liberdade cada, o deslocamento axial u_0 ao longo do elemento é obtido a partir de uma equação linear que interpola os deslocamentos nodais, enquanto que para o deslocamento transversal v utiliza-se os polinômios de Hermite do 3º grau, criando assim uma diferença de 2 graus entre as equações. Chan (1982) explicou que quando o eixo local x não coincide com o centróide da seção, a diferença entre os polinômios de deslocamento axial u e transversal v deve ser de apenas 1 grau para haver a consistência da formulação.

Isso pode ser observado na formulação dos deslocamentos do elemento, pois o deslocamento longitudinal u é dependente da rotação θ (que por sua vez é aproximada pela derivada do deslocamento transversal, conforme será visto no próximo item):

$$u = u_0 - y \frac{dv}{dx} \quad (5)$$

Portanto deve-se utilizar um polinômio do 2º grau para se descrever o deslocamento axial u_o para que o deslocamento longitudinal u fique consistente no plano xy (mesmo grau do polinômio para variação em x e em y). Isto pode ser obtido incluindo-se mais um nó no elemento, usualmente em seu centro, com um grau de liberdade axial. Chan (1982), Mari (1984), Blawendraad (1972) e Aldstedt e Bergan (1978) *apud* Stramandinoli (2007) foram os primeiros a utilizar o modelo de barra com o sétimo grau de liberdade interno. Esse modelo eleva para o segundo grau o deslocamento axial da barra de pórtico, sendo posteriormente condensado para não alterar a dimensão das matrizes de cálculo.

Mari (1984) explicou que este nó interno é importante para capturar a variação da altura da linha neutra que ocorre devido à não linearidade do material. A não inclusão deste nó tende a enrijecer o elemento, no caso de análise não linear.

A formulação do elemento finito de pórtico plano utilizada neste trabalho será descrita com detalhes nos próximos itens, inicialmente considerando material elástico linear e pequenos deslocamentos e deformações, e em seguida incluindo-se as não linearidades física e geométrica.

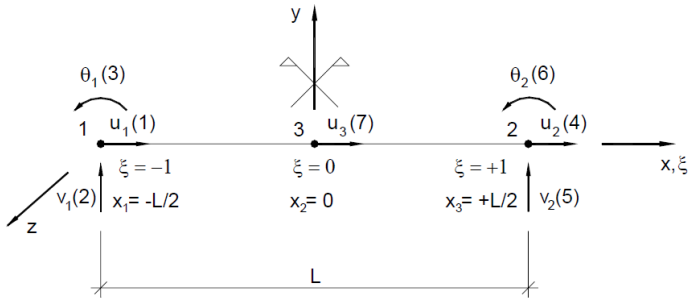
4.2. FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE LINEAR

Na análise linear, além das hipóteses de *Euler-Bernoulli*, admite-se que:

- o elemento sofre pequenos deslocamentos e deformações específicas;
- os materiais concreto e aço apresentam comportamento elástico linear.

Descreve-se neste item a formulação de um elemento de barra para pórtico plano, dotada de dois nós na extremidade sendo cada um deles com três graus de liberdade, deslocamento axial (u), deslocamento transversal (v) e rotação (θ) e um nó interno, com deslocamento axial (u) (ver Figura 4-1). Utiliza-se a formulação desenvolvida por Chimello (2003) e Stramandinoli (2007) baseada na formulação isoparamétrica. Para o eixo longitudinal utiliza-se a coordenada natural ξ , mantendo-se a coordenada y para o eixo transversal. Admite-se que o elemento tem seção transversal A , comprimento L e módulo de elasticidade E .

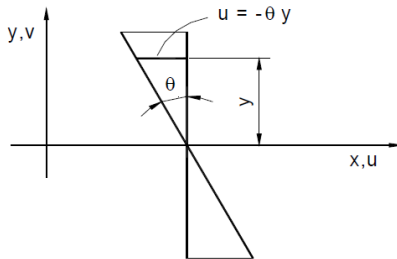
Figura 4-1 - Elemento de barra para pórtico plano



FONTE: Chimello (2003)

Utilizando as hipóteses de *Euler-Bernoulli*, o deslocamento longitudinal de um ponto qualquer na seção de um elemento, causado pela rotação, pode ser descrito como mostrado na Figura 4-2.

Figura 4-2 - Deslocamento de um ponto genérico



FONTE: Chimello (2003)

Admitindo-se que para pequenas rotações a tangente de um ângulo é igual ao próprio ângulo, o deslocamento de um ponto qualquer na altura da seção é:

$$\theta \cong \tan \theta = \frac{-u}{y} \therefore \quad (6)$$

$$u = -\theta y \quad (7)$$

e, como estão sendo admitidas pequenas rotações, tem-se que:

$$\theta \cong \frac{dv}{dx} \quad (8)$$

Portanto, pode-se escrever o deslocamento longitudinal ao longo do plano do elemento pela expressão:

$$u(x, y) = u_0(x) - y \frac{dv}{dx}(x) \quad (9)$$

a qual pode ser reescrita usando-se a coordenada natural para o eixo longitudinal:

$$u(\xi, y) = u_0(\xi) - y \frac{dv}{dx}(\xi) \quad (10)$$

Conforme explicado no item 4.1, deve-se utilizar para descrever o deslocamento axial u_0 um polinômio do 2º grau:

$$u_0(\xi) = N_1 u_1 + N_4 u_2 + N_7 \alpha_1 \quad (11)$$

que pode ser colocado sob a forma matricial:

$$u_0(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & N_4 & N_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Como é usada a formulação isoparamétrica, as funções de interpolação podem ser obtidas por inspeção, sendo descritas pelas expressões:

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)}{2} \quad (13)$$

$$N_2 = \frac{(1 + \xi)}{2} \quad (14)$$

$$N_7 = 1 - \xi^2 \quad (15)$$

Observa-se que α_l está relacionado com o deslocamento axial do nó interno, u_3 , podendo ser obtido com a aplicação de $\xi = 0$ nas funções de interpolação:

$$u_3(\xi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \alpha_1 \quad (16)$$

A expressão de deslocamento longitudinal pode, portanto, ser descrita como a associação das duas formas apresentadas em (9) e (11), uma parcela ao longo do eixo longitudinal e outra que varia ao longo do eixo vertical:

$$u(\xi, y) = \frac{(1-\xi)}{2} u_1 + \frac{(1+\xi)}{2} u_2 + (1-\xi^2) \alpha_1 - y \theta(\xi) \quad (17)$$

O campo de deslocamentos transversais do elemento é descrito na forma usual por:

$$v(\xi) = N_2 v_1 + N_3 \theta_1 + N_5 v_2 + N_6 \theta_2 \quad (18)$$

podendo ser escrito matricialmente na forma:

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} N_2 & N_3 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

As funções de interpolação usadas para descrever o deslocamento transversal ao longo do elemento em função dos deslocamentos transversais e rotações nodais são conhecidas como polinômios cúbicos de Hermite:

$$N_2 = 1 - \frac{3}{4}(\xi + 1)^2 + \frac{1}{4}(\xi + 1)^3 \quad (20)$$

$$N_3 = \frac{L}{2}(\xi+1) - \frac{L}{2}(\xi+1)^2 + \frac{L}{8}(\xi+1)^3 \quad (21)$$

$$N_5 = \frac{3}{4}(\xi+1)^2 - \frac{1}{4}(\xi+1)^3 \quad (22)$$

$$N_6 = -\frac{L}{4}(\xi+1)^2 + \frac{L}{8}(\xi+1)^3 \quad (23)$$

O campo de rotações ao longo do elemento pode ser obtido a partir do campo de deslocamentos transversais e, devido ao uso da coordenada natural, deve-se aplicar a Regra da Cadeia:

$$\theta(\xi) = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{2}{L} \quad (24)$$

Lembrando que se transforma a coordenada x em coordenada natural ξ a partir do mapeamento:

$$x = \frac{\xi}{2} L \quad \xi = \frac{2}{L} x \quad \therefore \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \quad (25)$$

Inserindo-se as funções de interpolação na expressão 24, obtém-se:

$$\theta(\xi) = \frac{2}{L} [N_2' v_1 + N_3' \theta_1 + N_5' v_2 + N_6' \theta_2] \quad (26)$$

onde $N' = \frac{d}{d\xi}$

Finalmente, a curvatura ao longo do elemento é obtida a partir da derivada da rotação em relação à x :

$$\varphi(\xi) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{2}{L} \quad (27)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2 v}{d\xi^2} \frac{2}{L} \quad (28)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} \quad (29)$$

a qual, com a inserção das funções de interpolação, fica:

$$\varphi(\xi) = \frac{4}{L^2} [N_2'' v_1 + N_3'' \theta_1 + N_5'' v_2 + N_6'' \theta_2] \quad (30)$$

onde $N'' = \frac{d^2}{d\xi^2}$

Efetuada-se as derivadas das funções de interpolação, vem:

$$N_2'' = \frac{3}{2} \xi \quad (31)$$

$$N_3'' = \frac{L}{4} (3\xi - 1) \quad (32)$$

$$N_5'' = -\frac{3}{2} \xi \quad (33)$$

$$N_6'' = \frac{L}{4} (3\xi + 1) \quad (34)$$

Introduzindo-se em seguida as expressões acima na expressão da curvatura, obtém-se:

$$\varphi(\xi) = \left[\frac{6}{L^2} \xi v_1 + \frac{(3\xi - 1)}{L} \theta_1 + \frac{(-6\xi)}{L^2} v_2 + \frac{(3\xi + 1)}{L} \theta_2 \right] \quad (35)$$

As deformações específicas normais na direção longitudinal x são obtidas derivando-se o campo de deslocamento longitudinal em relação à x . Lembrando que $\varepsilon_x(\xi, y)$ é a deformação normal em um ponto de abscissa e ordenada qualquer do elemento e $\varepsilon_o(\xi)$ indica a deformação axial, ao longo do eixo longitudinal:

$$\varepsilon_x(\xi, y) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{2}{L} = \frac{2}{L} \frac{du_0(\xi)}{d\xi} - \frac{2}{L} y \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \quad (36)$$

$$\varepsilon_0(\xi) = \frac{2}{L} \frac{du_0(\xi)}{d\xi} = \frac{u_2}{L} - \frac{u_1}{L} - \frac{4}{L} \xi \alpha_1 \quad (37)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{2}{L} \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \quad (38)$$

Reescrevendo a expressão 36 fica:

$$\varepsilon_x(\xi, y) = \varepsilon_0(\xi) - y\varphi(\xi) \quad (39)$$

a qual pode ser colocada sob a forma matricial:

$$\varepsilon_x(\xi, y) = \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (40)$$

Inserindo-se na expressão (40) as equações que descrevem a deformação específica axial e a curvatura, tem-se:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{4}{L}\xi \\ 0 & \frac{6}{L^2}\xi & \frac{(3\xi-1)}{L} & 0 & \frac{(-6\xi)}{L^2} & \frac{(3\xi+1)}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad (41)$$

em que $\underset{\sim}{\varepsilon}$ é denominado vetor de deformações específicas generalizadas. Portanto, a matriz $\underset{\sim}{B}$, de dimensão 2x7, relaciona as

deformações específicas generalizadas com os deslocamentos nodais do elemento.

Substituindo-se a expressão acima na equação que define as deformações específicas normais na direção longitudinal, vem:

$$\varepsilon_x(\xi, y) = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U}_L \quad (42)$$

No caso de modelo elástico linear, as tensões normais na direção x são obtidas de forma direta pela lei de Hooke:

$$\sigma_x(\xi, y) = E \varepsilon_x(\xi, y) \quad (43)$$

A dedução da matriz de rigidez do elemento pode ser realizada a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Pelo PTV, se um elemento está em equilíbrio de forças, ao se impor uma configuração de deslocamentos virtuais ao elemento deformado, o trabalho realizado pelas forças externas entre a configuração deformada e a configuração virtual deve se igualar ao trabalho realizado pelas forças internas sobre as respectivas deformações virtuais (La Rovere, 2002).

$$\delta W^i = \delta W^e \quad (44)$$

$$\delta W^i = \int_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV \quad (45)$$

$$\delta W^e = \delta U^T \underset{\sim}{f} = \delta U^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{U} \quad (46)$$

onde

$$\underset{\sim}{f}^T = \begin{bmatrix} N_1 & V_1 & M_1 & N_2 & V_2 & M_2 & N_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Substituindo-se as expressões (42) e (43) que definem as deformações e tensões normais longitudinais na parcela de trabalho virtual interno (45), vem:

$$\delta \varepsilon_x = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\delta U}_L = \delta U^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T \quad (48)$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad (49)$$

portanto,

$$\delta W^i = \int_{A \sim \frac{-L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\delta U^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T \right) \left(\underset{\sim}{E} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \right) dx dA = \int_{\frac{-L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \delta U^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} dx \quad (50)$$

$$\text{onde } \underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

admitindo-se que o eixo longitudinal x passa pelo centróide da seção. Finalmente, igualando-se as equações de trabalho virtual (46) e (50), extrai-se a expressão da matriz de rigidez do elemento:

$$\int_{\frac{-L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \delta U^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} dx = \delta U^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{U} \quad \therefore \quad (51)$$

$$\underset{\sim}{k} = \int_{\frac{-L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} dx = \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T(\xi) \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi \quad (52)$$

A integração da expressão (52) pode ser efetuada utilizando-se integração numérica, sendo usadas neste trabalho as Regras de Gauss. Para o caso de análise linear basta utilizar dois pontos de Gauss para se obter a matriz de rigidez elástica do elemento.

4.3. FORMULAÇÃO INCLUINDO A NÃO LINEARIDADE FÍSICA

Para a formulação incluindo a não linearidade física, além das hipóteses de Bernoulli, admite-se que:

- o elemento sofre pequenos deslocamentos e deformações específicas;
- o concreto e o aço são materiais homogêneos e há aderência perfeita entre os materiais;

- a seção transversal dos elementos é discretizada em camadas, admitindo-se que cada camada está submetida a um estado uniaxial de tensão;
- ocorre o efeito de *tension-stiffening* para o concreto fissurado;
- o aço das armaduras é um material elasto plástico com encruamento;
- os esforços totais em cada seção são obtidos superpondo-se os esforços obtidos das resultantes das tensões nas camadas de concreto com as provenientes das tensões nas armaduras de aço.

A formulação do elemento mostrado na Figura 4-1 é baseada na formulação apresentada no item 4.2, devendo-se alterar a formulação da matriz de rigidez e do vetor de forças do elemento, tendo em vista que a matriz constitutiva é função das deformações específicas, $\tilde{D} = \tilde{D}(\tilde{\epsilon})$.

Para análise não linear física, também se aplicam as Regras de Gauss para integração da matriz de rigidez e do vetor de forças do elemento, sendo utilizados 3 pontos. Em cada ponto de Gauss, a matriz constitutiva é obtida fazendo-se o somatório dos valores oriundos das camadas de concreto e os das camadas de armadura de aço. Admite-se que cada camada está submetida a um estado uniaxial de tensões, assim a equação constitutiva fica sendo:

$$\tilde{\sigma}_x = E(x, y) \tilde{\epsilon}_x \quad (53)$$

onde $E(x, y)$ é o módulo secante do material.

A matriz de rigidez é deduzida novamente a partir do PTV, igualando-se o trabalho virtual desenvolvido pelas forças internas ao desenvolvido pelas forças externas. Reescrevendo-se a parcela de trabalho virtual das forças internas:

$$\begin{aligned} \delta W^i = & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\tilde{L}_A}^{\tilde{L}} \left(\delta \tilde{U}^T \tilde{B}^T \tilde{A}^T \right) \left(E(x, y) \tilde{A} \tilde{B} \tilde{U} \right) d\tilde{A} d\tilde{x} = \\ & \delta \tilde{U}^T \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\tilde{L}_A}^{\tilde{L}} \tilde{B}^T \tilde{A}^T E(x, y) \tilde{A} \tilde{B} d\tilde{A} d\tilde{x} \right] \tilde{U} \end{aligned} \quad (54)$$

As integrais da matriz de rigidez são separadas em uma integral ao longo de x e outra integral na área da seção. Define-se neste ponto a matriz constitutiva secante do material, $\tilde{D} = \tilde{D}(\varepsilon)$, que envolve o módulo de elasticidade variável ao longo do elemento, e será avaliada em cada ponto de integração de Gauss:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(x) &= \int_A \tilde{A}^T E(x, y) \tilde{A} dA = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ -y \end{Bmatrix} E(x, y) \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix} dA = \\ &= \int_A \begin{bmatrix} E(x, y) & -yE(x, y) \\ -yE(x, y) & y^2 E(x, y) \end{bmatrix} dA. \therefore \tilde{D}(x) = \begin{bmatrix} EA(x) & -ES(x) \\ -ES(x) & EI(x) \end{bmatrix} \quad (55) \end{aligned}$$

onde $EA(x)$ é o coeficiente da matriz que representa a rigidez axial secante e $EI(x)$ representa a rigidez à flexão secante da seção, na coordenada x , e $-ES(x)$ é o coeficiente de interação entre os coeficientes que equivalem à rigidez axial e a de flexão. Estes coeficientes são obtidos pelo somatório dos valores de todas as camadas, de concreto e de armadura. No caso de análise linear, em que todos os módulos de elasticidade $E(x, y)$ são iguais, e também se o eixo longitudinal x do elemento passar pelo seu centróide, o coeficiente $-ES(x)$ será nulo.

Igualando-se as duas expressões (46) e (54) de trabalho virtual:

$$\delta \tilde{U}^T \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \tilde{B}^T \tilde{D}(x) \tilde{B} \, dx \right] \tilde{U} = \delta \tilde{U}^T \tilde{k} \tilde{U} \quad (56)$$

chega-se à expressão da matriz de rigidez secante:

$$\tilde{k} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \tilde{B}^T \tilde{D}(x) \tilde{B} \, dx = \int_{-1}^{+1} \tilde{B}^T(\xi) \tilde{D}(\xi) \tilde{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi \quad (57)$$

O vetor de forças internas ou restauradoras fica definido pela expressão:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{U} &= \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \underset{\sim}{B}^T(x) \underset{\sim}{D}(x) \underset{\sim}{B}(x) dx \right] \underset{\sim}{U} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \underset{\sim}{B}^T(x) \underset{\sim}{\sigma}(x) dx \quad \therefore \\ \underset{\sim}{r} &= \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T(\xi) \underset{\sim}{\sigma}(\xi) \frac{L}{2} d\xi \end{aligned} \quad (58)$$

onde:

$$\underset{\sim}{\sigma}(\xi) = \underset{\sim}{D}(\xi) \underset{\sim}{\varepsilon}(\xi) = \underset{\sim}{D}(\xi) \underset{\sim}{B}_L(\xi) \underset{\sim}{U} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (59)$$

é o vetor de tensões generalizadas, que fornece os esforços, axial e momento fletor, em cada ponto de integração ξ , obtido pelo somatório dos valores de tensão normal de cada camada.

Na análise não linear, aplicam-se em geral as forças externas incrementalmente, em etapas. Como em cada etapa o vetor de forças internas não estará necessariamente em equilíbrio com o vetor de forças externas aplicado ao elemento, será necessário se utilizar um processo iterativo para restabelecer o equilíbrio de forças no elemento, dissipando as forças residuais. Nesse trabalho será utilizado o Método de Newton-Raphson, descrito mais adiante no item 4.8, em que se utiliza a matriz de rigidez tangente em cada iteração.

Analogamente à expressão da matriz de rigidez secante, define-se a matriz de rigidez tangente, em função da matriz constitutiva tangente, que é formada a partir dos módulos de elasticidade tangente dos materiais, de cada camada, $E^t(\xi, y)$:

$$\begin{aligned}
k_{\sim}^t &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B_{\sim L}^T D_{\sim}^t B_{\sim L} dx = \int_{-\frac{LA}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_{\sim L} B_{\sim L}^T A_{\sim}^T E^t(x, y) A_{\sim} B_{\sim L} dx dA \quad \text{ou} \\
k_{\sim}^t &= \int_{-1}^1 B_{\sim L}^T(\xi) D_{\sim}^t(\xi) B_{\sim L}(\xi) \frac{L}{2} d\xi = \int_{-1}^{+1} \int_A B_{\sim L}^T A_{\sim}^T E^t(\xi, y) A_{\sim} B_{\sim L} \frac{L}{2} dA d\xi
\end{aligned}$$

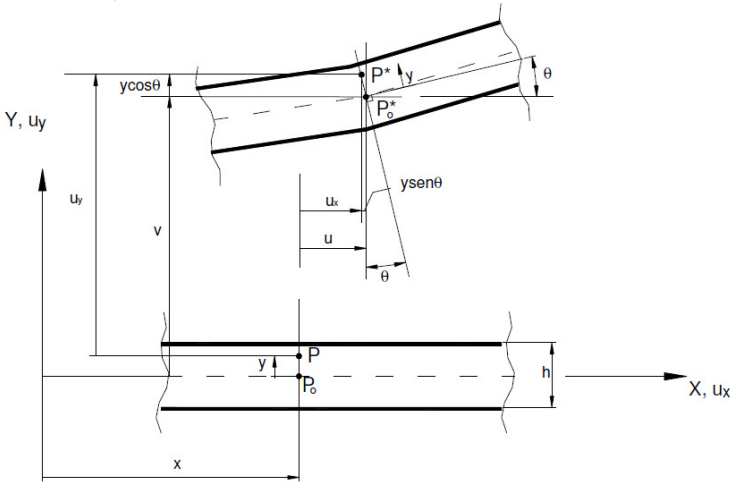
(60)

4.4. FORMULAÇÃO COM INCLUSÃO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Neste modelo admite-se que são válidas as hipóteses de Bernoulli e que o material constituinte da barra é elástico linear. No entanto serão consideradas rotações moderadas, ao invés de pequenas rotações, do eixo longitudinal do elemento de barra.

A formulação do elemento, mostrado na Figura 4-1, é baseada na formulação apresentada por Stramandinoli (2007), partindo da formulação linear do elemento apresentada no item 4.2. A alteração fundamental é devida ao surgimento de uma parcela não linear na expressão que define a deformação específica longitudinal, conforme descrito a seguir. Ressalta-se que Stramandinoli (2007) apresentou a formulação inicialmente para grandes rotações, conforme mostrado na Figura 4-3, e depois particularizou para rotações moderadas, sendo que no presente trabalho a dedução parte do ponto onde as rotações já são consideradas moderadas.

Figura 4-3 - Deformação de uma barra com hipótese de *Euler-Bernoulli* considerando grandes rotações



FONTE: Stramandinoli (2007)

Partindo da definição geral da deformação específica longitudinal considerando grandes deslocamentos e pequenas deformações em estruturas planas, de acordo com Taborda Garcia e Villaça (1995):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (61)$$

admite-se que o valor de $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ é pequeno, portanto $\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2$ pode ser

desprezado na expressão (61), mas o valor da rotação $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ não é mais

desprezável (teoria das rotações moderadas). Assim sendo, a expressão que define a deformação específica longitudinal ao longo do elemento passa a ser:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (62)$$

A segunda parcela da expressão (62) caracteriza a não linearidade geométrica da formulação NLG. Admitindo-se que as derivadas dos deslocamentos são pequenas em relação à unidade (teoria das rotações moderadas), os campos de deslocamento longitudinal e transversal no elemento podem ser descritos como se segue, usando a notação definida no item 4.2:

$$u_x(x, y) = u(x, y) = u_0(x) - y \frac{dv}{dx}(x) \quad (63)$$

$$u_y(x, y) = v(x) \quad (64)$$

sendo a rotação dada pela equação (4) e a curvatura por:

$$\varphi \equiv \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (65)$$

Ao longo do eixo longitudinal do elemento ($y=0$), a deformação específica longitudinal é obtida a partir do campo de deslocamentos:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (66)$$

E para um ponto genérico do elemento, a uma altura qualquer (y) em relação ao eixo, fica sendo:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - y\varphi = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \quad (67)$$

Utilizando-se a formulação isoparamétrica, transforma-se a coordenada x em coordenada natural ξ a partir do mapeamento dado na equação (25). O campo de deslocamentos pode então ser expresso em função dos deslocamentos nodais por meio das funções de interpolação, já na forma isoparamétrica, conforme visto no item 4.2:

$$u(\xi, y) = u_0(\xi) - y\theta(\xi) = (N_1 u_1 + N_4 u_2 + N_7 \alpha_1) - y\theta(\xi) \quad (68)$$

$$v(\xi) = N_2 v_1 + N_3 \theta_1 + N_5 v_2 + N_6 \theta_2 \quad (18)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{2}{L} = \frac{2}{L} [N_2' v_1 + N_3' \theta_1 + N_5' v_2 + N_6' \theta_2] \quad (69)$$

A deformação específica longitudinal pode ser partida em duas parcelas, uma linear e outra não linear. A parcela linear da deformação específica longitudinal é descrita como:

$$\varepsilon_L = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_{0L}(\xi) - y\varphi(\xi) \quad (70)$$

onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0L}(\xi) &= \frac{du_o}{dx} = \frac{du_o}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} [N_1' u_1 + N_4' u_2 + N_7' \alpha_1] = \\ &= \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{4\xi}{L} \alpha_1 \end{aligned} \quad (71)$$

$$\text{sendo } ' = \frac{d}{d\xi} \quad \therefore N_1' = -\frac{1}{2} N_4' = \frac{1}{2} N_7' = -2\xi$$

e a curvatura é dada por:

$$\varphi(\xi) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{2}{L} = \frac{4}{L^2} [N_2'' v_1 + N_3'' \theta_1 + N_5'' v_2 + N_6'' \theta_2] \quad (72)$$

sendo $'' = \frac{d^2}{d\xi^2}$ e as funções N'' dadas pelas equações 13 a 16.

Esta parcela linear, equação (70), pode ser colocada sob a forma matricial:

$$\varepsilon_L(\xi, y) = \begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0L} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B}_L \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{B}_0 \underset{\sim}{U} \quad (73)$$

usando-se a matriz $\underset{\sim}{A}$ e a matriz $\underset{\sim}{B}_L$ definidas anteriormente no item 4.2.

A parcela da deformação específica longitudinal não linear é tratada separadamente, da seguinte forma:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} v_x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (74)$$

Partindo da relação já conhecida dos deslocamentos transversais, equação (18), e escrevendo-o matricialmente:

$$v(\xi) = N_2 v_1 + N_3 \theta_1 + N_5 v_2 + N_6 \theta_2 \quad (18)$$

é equivalente a:

$$v = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U} \quad (75)$$

e a sua derivada em relação a x fica:

$$v_x = \underset{\sim}{N}_x \underset{\sim}{U} \quad (76)$$

$$v_x^T = \underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{N}_x^T \quad (77)$$

Substituindo-se as expressões (76) e (77) na parcela não linear da deformação específica longitudinal, vem:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{N}_x^T \underset{\sim}{N}_x \underset{\sim}{U} \quad (78)$$

Portanto, a deformação específica longitudinal é descrita pelas duas parcelas que juntas resultam em:

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_{NL} \quad (79)$$

A forma incremental da deformação específica é:

$$\delta \mathcal{E}_x = \frac{\partial \mathcal{E}_L}{\partial U} \delta U + \frac{\partial \mathcal{E}_{NL}}{\partial U} \delta U \quad (80)$$

e substituindo-se na equação acima as expressões que definem \mathcal{E}_L e \mathcal{E}_{NL} , vem:

$$\delta \mathcal{E}_x = \left(B_o + U^T N^T N \right) \delta U$$

$$B_{NL} = U^T N^T N \rightarrow \delta \mathcal{E}_x = \left(B_o + B_{NL} \right) \delta U \quad (81)$$

Definida a expressão (81) do incremento de deformação específica longitudinal considerando a não linearidade geométrica, obtém-se a matriz de rigidez do elemento com a aplicação do PTV. Igualando-se o trabalho virtual das forças internas ao trabalho virtual das forças externas, equações 44, 45 e 46:

$$\int_{V^e} \delta \mathcal{E}_x^T \sigma dV^e = \delta U^T f \quad (82)$$

Substituindo-se a expressão (81) na equação (82) resulta em:

$$\delta U^T \int_{V^e} \left(B_o + B_{NL} \right)^T \sigma_x dV^e = \delta U^T f \quad \therefore \quad (83)$$

$$\int_{V^e} \left(B_o + B_{NL} \right)^T \sigma_x dV^e = f \quad (84)$$

Tendo em vista que o comportamento do elemento é não linear, o equilíbrio de forças acima não será necessariamente atendido a cada etapa de carga aplicada, devendo-se utilizar um processo iterativo para dissipar as forças residuais, ou $\psi = 0$:

$$\psi = f - r \quad (85)$$

onde \tilde{r} , é o vetor de forças internas ou restauradoras :

$$\tilde{r} = \int_{V^e} (\tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL})^T \sigma_x dV^e$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL} \quad \rightarrow \quad \tilde{r} = \int_{V^e} \tilde{B}^T \sigma_x dV^e \quad (86)$$

Conforme comentado no item 4.3, será adotado neste trabalho o Método de Newton-Raphson para resolução do sistema de equações não lineares de equilíbrio de forças. Neste método será necessária a utilização da matriz de rigidez tangente do elemento, \tilde{k}^t (Stramandinoli, 2007) no processo de linearização:

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial U}(\tilde{u}^k) \Delta u = \tilde{\psi}(\tilde{u}^k) \quad (87)$$

em que:

$$\tilde{k}^t = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial U} = \int_{V^e} \frac{\partial \tilde{B}^T}{\partial U} \sigma_x dV^e + \int_{V^e} \tilde{B}^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial U} dV^e \quad (88)$$

A matriz de rigidez tangente é calculada separadamente, pois o vetor de forças restauradoras \tilde{r} é composto por duas parcelas, uma linear e outra não linear. Os resultados são os seguintes:

$$\frac{\partial \tilde{B}^T}{\partial U} = \frac{\partial \tilde{B}_0}{\partial U} + \frac{\partial \tilde{B}_{NL}}{\partial U} = \frac{\partial (\tilde{A} \tilde{B}_L)}{\partial U} + \frac{\partial (\tilde{U}^T \tilde{N}_x^T \tilde{N}_x)}{\partial U} = \tilde{N}_x^T \tilde{N} \quad (89)$$

$$\int_{V^e} \frac{\partial \tilde{B}^T}{\partial U} \sigma_x dV = \int_{V^e} \tilde{N}_x^T \tilde{N}_x \sigma_x dV^e \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
\int_{V^e} B^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial U} dV^e &= \int_{V^e} \left(B_{\sim 0} + B_{\sim NL} \right)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U} dV^e = \\
&= \int_{V^e} \left(B_{\sim 0} + B_{\sim NL} \right)^T E \left(B_{\sim 0} + B_{\sim NL} \right) dV^e
\end{aligned} \tag{91}$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Finalmente, a matriz de rigidez tangente do elemento fica sendo, com a segunda integração expandida, a soma de três submatrizes:

$$\begin{aligned}
k_{\sim}^t &= \int_{V^e} N^T N \sigma_x dV^e + \\
&\int_{V^e} \left(B_{\sim 0}^T E B_{\sim 0} + B_{\sim 0}^T E B_{\sim NL} + B_{\sim NL}^T E B_{\sim 0} + B_{\sim NL}^T E B_{\sim NL} \right) dV^e
\end{aligned} \tag{92}$$

onde:

- Matriz geométrica da barra:

$$k_{\sim g} = \int_{V^e} N^T N \sigma_x dV^e \tag{93}$$

- Matriz referente à parte inicial elástica:

$$k_{\sim 0} = \int_{V^e} B_{\sim 0}^T E B_{\sim 0} dV^e \tag{94}$$

- Matriz gerada ao considerar a estrutura na posição deformada:

$$k_{\sim u} = \int_{V^e} \left(B_{\sim 0}^T E B_{\sim NL} + B_{\sim NL}^T E B_{\sim 0} + B_{\sim NL}^T E B_{\sim NL} \right) dV^e \tag{95}$$

4.5. FORMULAÇÃO COM INCLUSÃO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA

Nesta formulação deve-se juntar a formulação que inclui a não linearidade geométrica, descrita no item 4.4, com a que inclui a não linearidade física, descrita no item 4.3. O elemento de barra, mostrado na Figura 4-1, tem sua seção discretizada em camadas de concreto e de armadura longitudinal sobrepostas, conforme visto no item 4.3.

A matriz de rigidez tangente do elemento considerando a NLG, vista na equação (88) é:

$$k_{\sim}^t = \frac{\partial r}{\partial U_{\sim}} = \int_{V^e} \frac{\partial B^T}{\partial U_{\sim}} \sigma_x dV^e + \int_{V^e} B^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial U_{\sim}} dV^e \quad (88)$$

A primeira parcela da equação (88) fica inalterada, equação (86), mas deve-se alterar a segunda parcela para levar em conta a não linearidade do material, ou seja:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} = E^t(x, y) \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \int_{V^e} B^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial U_{\sim}} dV^e &= \int_{V^e} (B_{\sim 0} + B_{\sim NL})^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U} dV^e = \\ &= \int_{V^e} (B_{\sim 0} + B_{\sim NL})^T E^t(x, y) (B_{\sim 0} + B_{\sim NL}) dV^e \end{aligned} \quad (97)$$

Juntando o resultado das duas parcelas, equação (90) e (97), a matriz de rigidez tangente pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} k_{\sim}^t &= \int_{V^e} N_{\sim x}^T N_{\sim x} \sigma_x dV^e + \\ &\int_{V^e} (B_{\sim 0} + B_{\sim NL})^T E^t(x, y) (B_{\sim 0} + B_{\sim NL}) dV^e \quad \therefore \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} k_{\sim}^t &= \int_{V^e} N_{\sim x}^T N_{\sim x} \sigma_x dV^e + \\ &+ \int_{V^e} (B_{\sim 0}^T E^t(x, y) B_{\sim 0} + B_{\sim 0}^T E^t(x, y) B_{\sim NL} + B_{\sim NL}^T E^t(x, y) B_{\sim 0} + B_{\sim NL}^T E^t(x, y) B_{\sim NL}) dV^e \end{aligned} \quad (99)$$

Conforme visto anteriormente, a matriz de rigidez tangente é formada por três submatrizes, cujas integrais são efetuadas por três pontos de Gauss para integração ao longo do eixo longitudinal, ξ , do elemento e em cada ponto de Gauss a integração na área da seção é efetuada somando-se os valores de todas as camadas de concreto e de armadura longitudinal:

- Matriz geométrica da estrutura:

$$\begin{aligned}
 k_{\sim g} &= \int_{V^e} N_{\sim x}^T N_{\sim x} \sigma_x dV^e = \int_{-1}^1 \int_A N_{\sim x}^T N_{\sim x} \sigma_x dA \frac{L}{2} d\xi = \\
 &= \int_{-1}^{+1} N_{\sim x}^T N_{\sim x} N(\xi) \frac{L}{2} d\xi
 \end{aligned} \tag{100}$$

onde $N(\xi)$ é o esforço axial na seção correspondente ao ponto de Gauss de coordenada ξ .

- Matriz inicial:

$$\begin{aligned}
 k_{\sim 0} &= \int_{V^e} B_{\sim 0}^T E'(x, y) B_{\sim 0} dV^e = \int_{-1}^1 \int_A B_{\sim L}^T A^T E'(\xi, y) A B_{\sim L} dA \frac{L}{2} d\xi = \\
 &= \int_{-1}^1 B_{\sim L}^T D'(\xi) B_{\sim L} \frac{L}{2} d\xi
 \end{aligned} \tag{101}$$

onde a matriz constitutiva tangente é:

$$\begin{aligned}
 D'_{\sim}(\xi) &= \int_A A_{\sim}^T E'(\xi, y) A_{\sim} dA = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ -y \end{Bmatrix} E'(\xi, y) [1 \quad -y] dA = \\
 &= \int_A \begin{bmatrix} E'(\xi, y) & -yE'(\xi, y) \\ -yE'(\xi, y) & y^2 E'(\xi, y) \end{bmatrix} dA \therefore D'_{\sim}(\xi) = \begin{bmatrix} (EA)'(\xi) & -(ES)'(\xi) \\ -(ES)'(\xi) & (EI)'(\xi) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{102}$$

- Matriz gerada ao considerar a estrutura na posição deformada:

$$k_{\sim u} = \int_{V^e} \left(B_{\sim 0}^T E'(x, y) B_{\sim NL} + B_{\sim NL}^T E'(x, y) B_{\sim 0} + B_{\sim NL}^T E'(x, y) B_{\sim NL} \right) dV^e \tag{103}$$

Essa matriz $k_{\sim u}$ pode ainda ser partida em três matrizes:

$$k_{\sim u1} = \int_{-1}^{+1} B^T \left\{ \begin{matrix} (EA)^t \\ -(ES)^t \end{matrix} \right\}_{\xi} B_{\sim NL} \frac{L}{2} d\xi \quad (104)$$

$$k_{\sim u2} = \int_{-1}^{+1} B^T \left[(EA)^t \quad -(ES)^t \right]_{\xi} B_{\sim L} \frac{L}{2} d\xi \quad (105)$$

$$k_{\sim u3} = \int_{-1}^{+1} B^T (EA)^t_{\xi} B_{\sim NL} \frac{L}{2} d\xi \quad (102)$$

Da mesma forma o vetor de forças restauradoras r_{\sim} pode ser dividido em duas partes, separando a matriz B_{\sim} numa parte linear e outra não linear. Assim, são determinados dois vetores $r_{\sim 0}$ e $r_{\sim NL}$, lembrando que

$$dV = dA dx \text{ e } dx = \frac{L}{2} d\xi:$$

$$r_{\sim 0} = \int_{V^e} B^T A^T \sigma_x dV = \int_{-1}^1 \int_{\sim L} B^T A^T \sigma_x dA \frac{L}{2} d\xi \quad (106)$$

A expressão (106) pode ser reescrita considerando-se o vetor de tensões generalizadas usado anteriormente no item 4.2:

$$\sigma_{\sim} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \int_A A^T \sigma_x dA \quad (107)$$

$$r_{\sim 0} = \int_{-1}^{+1} B^T \sigma_{\sim} \frac{L}{2} d\xi \quad (108)$$

Procedendo de maneira semelhante para $r_{\sim NL}$:

$$r_{\sim NL} = \int_V B^T \sigma_x dV = \int_{-1}^1 \int_{\sim NL} B^T \sigma_x dA \frac{L}{A} d\xi \quad (109)$$

Considerando que o esforço axial na seção correspondente a cada ponto de Gauss é:

$$N(\xi) = \int_A \sigma_x dA \quad (110)$$

a parte não linear do vetor de forças restauradoras fica:

$$r_{\sim NL} = \int_{-1}^{+1} B^T N(\xi) \frac{L}{2} d\xi \quad (111)$$

Para completar a formulação do elemento não linear falta apenas definir as relações tensão-deformação e os módulos de elasticidade tangente dos materiais, concreto e aço, apresentados no que se segue.

4.6. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

As relações constitutivas dos materiais em um modelo de análise podem apresentar as condições de não linearidade física desejada e ainda considerações de efeitos característicos dos materiais. Ainda, de acordo com Proença (1986) *apud* Silva (1996), chega até ser improvável que um único modelo constitutivo de um material exprima todos os fenômenos possíveis de ocorrerem, havendo necessidade de se utilizar mais de um modelo para o mesmo material.

Os modelos constitutivos apresentados aqui para o material concreto partem da hipótese que o elemento está submetido a um estado de tensão uniaxial, condizente com as hipóteses de *Bernoulli*. Estes modelos constitutivos foram implementados por Stramandinoli (2007) e Chimello (2003) no programa ANALEST.

4.6.1. Concreto sob compressão uniaxial

Stramandinoli (2007) fez uso de três modelos diferentes para descrever o concreto sob compressão. O primeiro é o modelo modificado de Hognestad (1951) em que ao invés de se usar no ramo descendente a reta do modelo original (ver Figura 4-4), adota-se a mesma parábola do ramo ascendente.

A equação que descreve a curva do gráfico é:

$$\sigma_c = -f_{cm} \left[-2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{para } -\varepsilon_c < \varepsilon_u = 2\varepsilon_0 \quad (112)$$

onde:

σ_c = tensão no concreto;

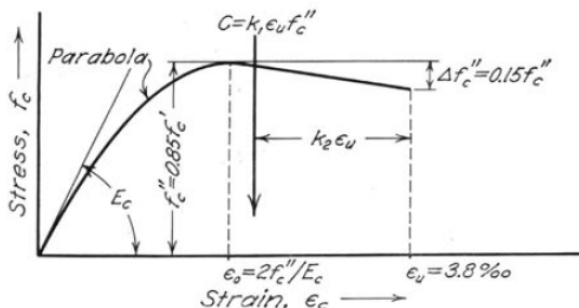
f_{cm} = valor de resistência à compressão médio obtido em ensaios uniaxiais (considerada positiva);

ε_0 = deformação correspondente à tensão máxima f_{cm} (considerada positiva);

ε_c = deformação no concreto;

ε_u = deformação última no concreto (considerada positiva).

Figura 4-4 – Modelo constitutivo original de Hognestad



FONTE: Hognestad (1951)

O segundo modelo constitutivo adota a curva indicada no CEB-FIP 1990 na sua forma original, sendo apresentado na Figura 4-5 e com expressão para a tensão no concreto descrita a seguir:

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{(-\varepsilon_c)}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{(-\varepsilon_c)}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad \text{para } (-\varepsilon_c) < \varepsilon_{lim} \quad (113)$$

onde:

f_{cm} = valor médio da resistência à compressão obtida em ensaios uniaxiais (considerada positiva);

ε_{c1} = deformação correspondente à tensão máxima f_{cm} (considerada positiva);

ε_c = deformação no concreto;

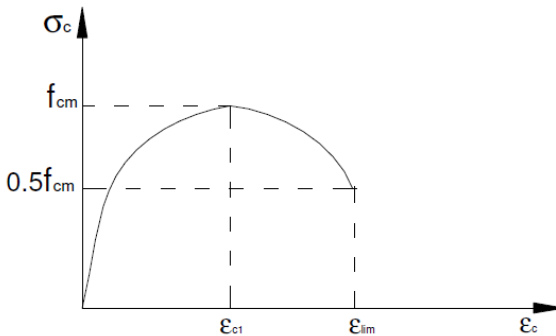
ε_{lim} = deformação limite a ser considerada, correspondente a uma tensão de $0,5f_{cm}$ no ramo descendente da curva (considerada positiva);

E_{ci} = módulo de deformação longitudinal inicial

$$= 2,15 \times 10^4 MPa \cdot \left[\frac{f_{cm}(MPa)}{10MPa} \right]^{1/3}$$

$$E_{c1} = \text{módulo de deformação secante} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}}$$

Figura 4-5 - Modelo constitutivo do CEB-90 (1990)



FONTE: Stramandinoli (2007)

O terceiro modelo constitutivo é o modelo proposto por Mander *et al* (1988) *apud* Paz (1995), que considera de maneira aproximada o efeito do confinamento passivo propiciado pelos estribos. Este confinamento resulta em um aumento na resistência e na ductilidade do concreto. A curva que descreve o modelo está ilustrada na figura 4-6 e a equação que fornece a tensão no concreto é:

$$\sigma_c = - \frac{f'_{cc} r}{r - 1 + x^r} \quad (114)$$

onde:

$$x = -\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right]$$

$$r = \frac{E_c}{(E_c - E_{sec})}$$

$$E_{sec} = \frac{f_{cc}}{\varepsilon_{cc}}$$

$$E_c = 5000 \sqrt{f'_{co}} \text{ com } f'_{co} \text{ em MPa}$$

sendo:

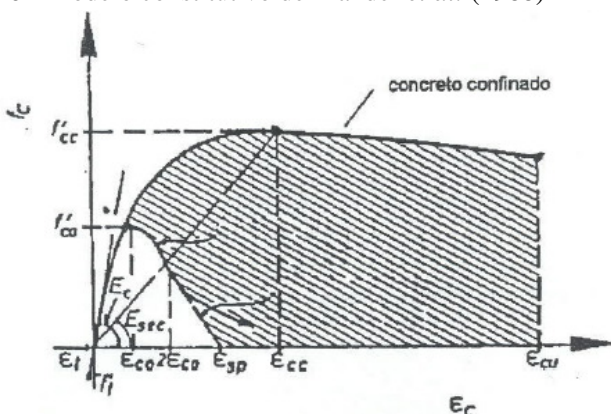
f'_{cc} = tensão máxima de compressão do concreto confinado (considerada positiva);

ε_{cc} = deformação correspondente a f'_{cc} (considerada positiva);

f'_{co} = tensão máxima de compressão do concreto não confinado (considerada positiva);

ε_{co} = deformação correspondente a f'_{co} (considerada positiva).

Para determinação detalhada dos valores de tensão máxima de compressão do concreto, confinado ou não, consultar Stramandinoli (2007).

Figura 4-6 - Modelo constitutivo de Mander *et al.* (1988)

FONTE: Stramandinoli (2007)

4.6.2. Concreto sob tração uniaxial

Usualmente admite-se que, até que inicie a fissuração, ou seja, até atingir a sua resistência à tração, o concreto puro apresenta um comportamento elástico linear. Sua resistência à tração é inferior do que à compressão, sendo assim mais frágil.

Após a fissuração, o concreto puro sob tração ainda apresenta certa resistência aos esforços chamados de *bridging stresses*, quando as aberturas ainda são pequenas. À medida que as fissuras abrem, estes esforços diminuem, sendo esse fenômeno chamado de *tension-softening*, ou amolecimento do concreto.

No concreto armado, além das microfissuras na seção do concreto, microfissuras também surgem no concreto ao longo das barras de aço, sendo estas chamadas de *bond cracking*. Quando os dois tipos de fissuras interagem, obedecendo ao fenômeno de amolecimento, a resposta obtida da estrutura é denominada *tension-stiffening*. Em suma, uma análise que considera *bond cracking* e *tension-softening* produz o mesmo efeito na resposta da estrutura que a consideração do enrijecimento do concreto tracionado entre fissuras, denominado *tension-stiffening* (CEB-FIB, 2008).

Ainda segundo CEB-FIB (2008), a modelagem desse efeito pode ser feita de duas formas, primeiro modificando a rigidez das barras de aço, e segundo, modificando a matriz de rigidez do concreto para absorver a tensão depois da fissuração. A segunda solução pode ainda ser classificada em modelos de fissuração distribuída e modelos de

fissuração discreta. Ainda, a forma de considerar a fissuração como distribuída em determinado volume do elemento é a forma mais popular de implementação, já que é independente de espaçamentos entre fissuras, taxa e direção da armadura.

Adota-se neste trabalho o modelo de *tension-stiffening* proposto por Stramandinoli e La Rovere (2008), que modifica a equação constitutiva do concreto tracionado após este atingir a resistência à tração. O modelo considera um decaimento exponencial para a tensão no concreto, após atingir sua resistência à tração. O decaimento exponencial é função de um parâmetro α , que depende da taxa de armadura longitudinal e da relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto. Este modelo de *tension-stiffening* foi baseado no modelo do Manual de Fissuração e Deformação do CEB de 1985, o qual altera a relação tensão *versus* deformação do aço para representar o fenômeno.

Separando o comportamento do elemento de concreto armado em trecho não fissurado e fissurado, tem-se:

- $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ para deformação no concreto inferior à deformação de fissuração

$$\sigma_{ct} = E_c \varepsilon \quad (115)$$

- $\varepsilon_{cr} < \varepsilon \leq \varepsilon_y$ para deformação no concreto entre a deformação no início da fissuração e a deformação relativa ao escoamento do aço

$$\sigma_{ct} = f_{ct} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \right)} \quad (116)$$

onde:

σ_{ct} = tensão de tração no concreto;

f_{ct} = valor de resistência média à tração do concreto;

ε_{cr} = deformação no concreto referente ao início da fissuração;

ε_y = deformação correspondente ao início do escoamento do aço da armadura longitudinal;

e o parâmetro α é definido pela equação:

$$\alpha = 0,017 + 0,255(n\rho) - 0,106(n\rho)^2 + 0,016(n\rho)^3 \quad (117)$$

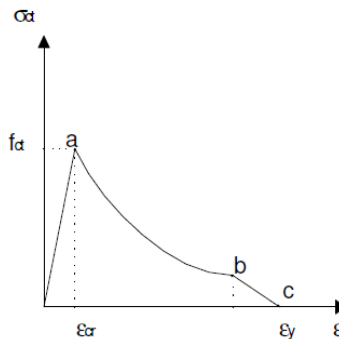
onde:

$n = \frac{E_s}{E_c}$ = relação entre os módulos de elasticidade do aço e do

concreto;

ρ = taxa de armadura longitudinal da seção.

Figura 4-7 – Modelo constitutivo com modelo de *tension-stiffening*



FONTE: Stramandinoli (2007)

Na ausência de ensaios experimentais de tração, a resistência à tração do concreto (f_{ct}) pode ser estimada pela expressão (118), conforme recomendação da NBR-6118/2007:

$$f_{ctm} = 0,3.(f_{ck})^{\frac{2}{3}} \quad (118)$$

A teoria apresentada para a consideração do fenômeno de *tension-stiffening* foi baseada em um modelo de tirante de concreto armado, submetido apenas à tração. Para se estender essa teoria para elementos de vigas e colunas submetidas à flexão, deve ser feita uma modificação para levar em conta que apenas uma zona dos elementos sofre tração. Pode-se adotar para isto o conceito de altura efetiva de tração introduzido pelo boletim do CEB de 1990:

$$h_{ef} = 2,5(h - d) < \frac{h - x}{3} \quad (119)$$

onde:

h = altura da peça;

d = altura útil da peça. Adotado como aproximadamente 90% da altura da peça;

x = altura da zona comprimida.

Considerando um valor aproximado para $(h-d)$ chega-se a:

$$h_{ef} = 2,5(0,1h) = \frac{h}{4} \quad (120)$$

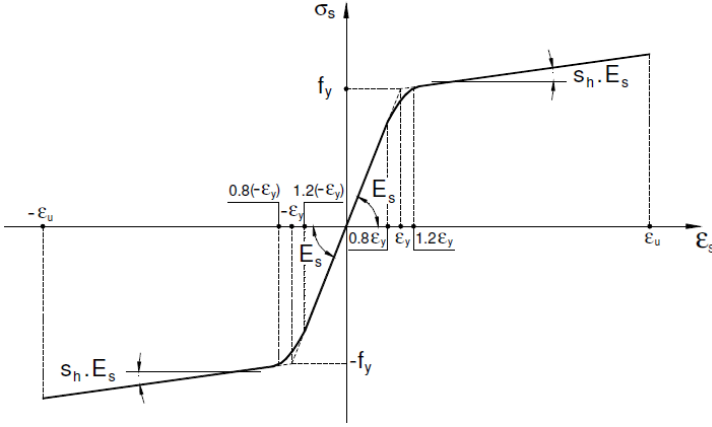
Assim sendo só deve-se aplicar o efeito de *tension-stiffening* na região da seção correspondente a esta altura efetiva (h_{ef}), ou seja, o cálculo da taxa de armadura ρ a ser utilizado na equação (117) passa a ser:

$$\rho = \frac{A_s}{b.h_{ef}} \quad (121)$$

4.6.3. Aço

O modelo constitutivo admitido para o aço é o elasto plástico com encruamento (*strain-hardening*), definido pelo coeficiente S_h , em que o material continua a suportar tensões com o aumento das deformações plásticas. Originalmente este modelo seria composto de duas retas com inclinações distintas, separando precisamente o regime elástico do plástico. La Rovere (1990) propôs a suavização da transição das inclinações no trecho entre $0,8\varepsilon_y$ e $1,2\varepsilon_y$ por meio da adoção de uma curva parabólica. Esta solução tem como objetivo evitar problemas de convergência e oscilações no processo iterativo utilizado para se obter equilíbrio das equações não lineares (ver Figura 4-6).

Figura 4-8 - Modelo constitutivo para o aço



FONTE: Stramandinoli (2007)

As relações são as que seguem:

Para $\varepsilon_s < 0,8\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (122)$$

$$E_s^t = E_s \quad (123)$$

$$E_s^s = E_s \quad (124)$$

Para $0,8\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 1,2\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = E_s \left[(S_h - 1) \varepsilon_s \frac{\varepsilon_s}{0,8\varepsilon_y} + (3 - 2S_h) - \varepsilon_s - 0,8\varepsilon_y (1 - S_h) \right] \quad (125)$$

$$E_s^t = E_s \left[(2S_h - 2) \frac{\varepsilon_s}{0,8\varepsilon_y} + (3 - 2S_h) \right] \quad (126)$$

$$E_s^s = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} \quad (127)$$

Para $\varepsilon_s > 1,2\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = f_y + S_h E_s (\varepsilon_s - \varepsilon_y) \quad (128)$$

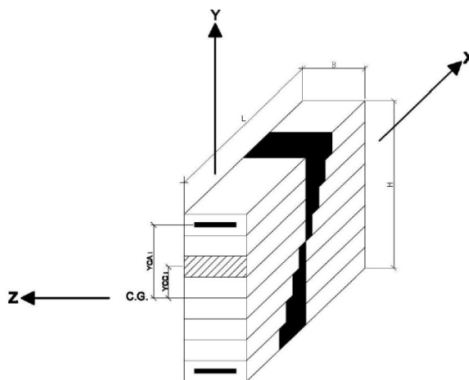
$$E_s^t = S_h E_s \quad (129)$$

$$E_s^s = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} \quad (130)$$

4.7. MÉTODO DAS LAMELAS OU CAMADAS

Conforme visto anteriormente, para consideração da não linearidade física, será utilizado o Método das Lamelas (*Fiber Model*), em que a seção do elemento é discretizada em camadas ou lamelas (ver Figura 4-9). A integração das matrizes e vetores no volume do elemento é separada em integração ao longo do eixo longitudinal (x), efetuada pelas Regras de Gauss, e integração ao longo da área, calculada pelo somatório dos valores provenientes das camadas de concreto e de armadura longitudinal de aço. As tensões e matrizes constitutivas são avaliadas em cada seção correspondente a um ponto de integração de Gauss, e o Método das Lamelas é aplicado para obter os resultados da integração na área da seção.

Figura 4-9 - Método das lamelas

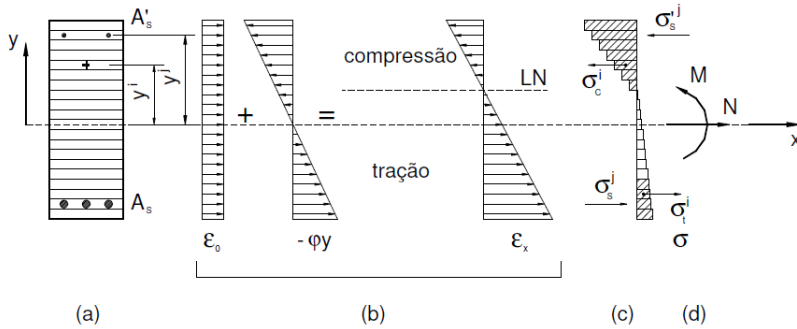


FONTE: Corelhano (2010)

O método prevê que a seção transversal do elemento seja dividida em “n” camadas de concreto e “n_s” camadas de armadura de aço

longitudinal. As camadas estão submetidas a um estado uniaxial de tensões, admitindo-se que as propriedades dos materiais são constantes em cada camada (Figura 4-10).

Figura 4-10 - Exemplo de discretização do método das lamelas a) discretização das seções em camadas; b) distribuição de deformações; c) distribuição de tensões e d) esforços totais.



FONTE: Chimello (2003)

O cálculo de deformações em cada camada, de concreto ou armadura, é efetuado no centro de cada camada (Chimello, 2003), usando-se as equações apresentadas anteriormente nos itens 4.3 e 4.5:

$$\epsilon_c^i = \epsilon_0 - y^i \phi \quad (131)$$

$$\epsilon_s^j = \epsilon_0 - y^j \phi \quad (132)$$

onde:

ϵ_c^i = deformação no centro da camada “i” de concreto;

y^i = distância do centro da camada de concreto até o centróide da seção transversal;

ϵ_s^j = deformação no centro da camada “j” de armadura;

y^j = distância do centro da camada de armadura até o centróide da seção transversal.

A seguir, as tensões em cada camada são obtidas com as respectivas relações constitutivas dos materiais e os esforços resultantes, normal e momento na seção, são resultado da junção dos esforços do concreto e aço.

$$N = \sum_i A_c^i \sigma_c^i + \sum_j A_s^j \sigma_s^j \quad (133)$$

$$M = -\sum_i A_c^i \sigma_c^i y^i - \sum_j A_s^j \sigma_s^j y^j \quad (134)$$

onde:

σ_c^i = tensão no centro da camada de concreto;

σ_s^j = tensão no centro da camada da armadura;

A_c^i = área da seção da camada de concreto;

A_s^j = área da seção de aço na camada.

Ainda, das relações $\sigma_c^i = E_c^i (\varepsilon_0 - y^i \varphi)$ e $\sigma_s^j = E_s^j (\varepsilon_0 - y^j \varphi)$, em que E_c^i e E_s^j , são os módulos secantes do concreto e do aço, respectivamente, em cada camada, é possível proceder a substituição nas expressões (133) e (134):

$$N = \sum_i A_c^i E_c^i (\varepsilon_0 - y^i \varphi) + \sum_j A_s^j E_s^j (\varepsilon_0 - y^j \varphi) \quad (135)$$

$$M = -\sum_i A_c^i E_c^i y^i (\varepsilon_0 - y^i \varphi) - \sum_j A_s^j E_s^j y^j (\varepsilon_0 - y^j \varphi) \quad (136)$$

Se estas equações forem reescritas matricialmente é possível isolar e identificar os elementos da matriz constitutiva secante \tilde{D} :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

onde:

$$D_{11} = \sum_i A_c^i E_c^i + \sum_j A_s^j E_s^j \quad (137)$$

$$D_{12} = D_{21} = -\sum_i A_c^i E_c^i y^i - \sum_j A_s^j E_s^j y^j \quad (138)$$

$$D_{22} = \sum_i A_c^i E_c^i (y^i)^2 + \sum_j A_s^j E_s^j (y^j)^2 \quad (139)$$

De forma análoga, para a matriz constitutiva tangente \tilde{D}' as componentes da matriz são obtidas da mesma forma, porém, o módulo utilizado é o tangente, E' .

4.8. SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Como introdução à solução dos problemas não lineares, Cook *et al.* (1989) definem estes como problemas, no campo da estática, onde a matriz de rigidez ou o vetor de cargas atuantes é dependente dos deslocamentos.

Alguns métodos de solução para sistemas não lineares são apresentados, sendo dada ênfase ao método de Newton-Raphson, por este apresentar maior facilidade de implementação computacional (é um dos métodos implementados no programa ANALEST). As deduções do método são as apresentadas por Cook *et al.* (1989), Lourenço (1999) e Stramandinoli (2007). Neste trabalho, a formulação é apresentada para um grau de liberdade e depois estendida para vários graus de liberdade.

O método de Newton-Raphson é conhecido também por método Incremental e Iterativo. Ele baseia-se em traçar tangentes ao gráfico de equilíbrio F versus u do elemento, iterando os deslocamentos até o sistema convergir em determinado nível de carregamento, sendo que estas tangentes traçadas estão relacionadas com a rigidez tangente do elemento, atualizada em cada iteração.

Ao aplicar um incremento de carga, busca-se o deslocamento correspondente. Assim, expande-se a força residual numa série de Taylor¹ truncada em torno do último deslocamento obtido na posição de equilíbrio, por meio de convergência do processo iterativo. Assim, admite-se que a força residual no novo ponto é equivalente a:

¹ Em problemas não lineares o comportamento do sistema não é conhecido quando próximo do ponto de equilíbrio. Uma forma de solução é a linearização das equações em torno do ponto de equilíbrio, obtendo uma resposta aproximada com base no comportamento do sistema linear que serve de aproximação. Essa linearização é feita por meio de uma expansão truncada da série de Taylor.

$$\psi(u^{k+1}) \approx \psi(u^k) + \frac{d\psi}{du}(u^k)\delta u + \frac{1}{2!} \frac{d^2\psi}{du^2}(u^k)(\delta u)^2 + \dots \quad (140)$$

O índice “k” indica que as quantidades são calculadas no último ponto em que se obteve convergência. É possível ainda obter uma estimativa melhor da solução eliminando os termos de segunda ordem e superior (truncando a série) e fazendo a força residual no ponto igual a zero ($\psi(u^{k+1}) = 0$).

$$0 = \psi(u^k) + \frac{d\psi}{du}(u^k)\delta u \quad (141)$$

$$\text{como } \frac{d\psi}{du} = \frac{d(f-r)}{du} = -\frac{dr}{du}$$

$$r(u^k) + \frac{dr}{du}(u^k)\delta u = f(u^k) \quad (142)$$

Admitindo que o equilíbrio da força residual seja escrito como $\psi = f - r$, que é a força externa menos a força interna ou restauradora:

$$\frac{dr}{du}(u^k)\delta u = \psi(u^k) \quad (143)$$

Portanto, a rigidez tangente é a derivada da força restauradora em relação ao deslocamento [Stramandinoli (2007) e Cook *et al.* (1989)]:

$$k^t = \frac{dr}{du} \quad (144)$$

Por essa relação é possível obter, para a rigidez tangente e a força residual avaliadas no último ponto em que se obteve o equilíbrio, uma variação do deslocamento referente ao novo deslocamento u^{k+1} :

$$k^t(u^k)\delta u^{k+1} = \psi(u^k) \quad (145)$$

Generalizando o processo de iteração de um ciclo qualquer “i”, tem-se a sequência;

- Aplicação da relação acima para se obter a variação do deslocamento;
- Aplicação da variação na equação:

$$u^{k+1} = u^k + \delta u^{k+1} \quad (146)$$

- Com o novo deslocamento calculado é possível a determinação das deformações, tensões, atualização da rigidez tangente, $k^t(u^{k+1})$ e da força restauradora, $r(u^{k+1})$;
- A partir da força restauradora a nova força residual é obtida:

$$\psi(u^{k+1}) = f - r(u^{k+1}) \quad (147)$$

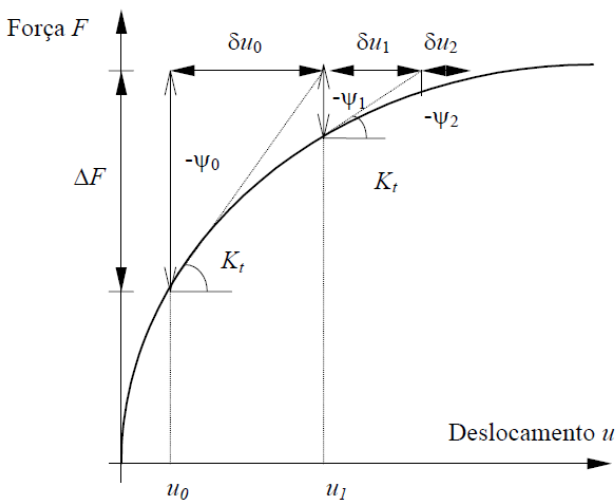
É importante observar que, dentro de cada incremento de carga, podem existir várias iterações, onde cada uma procura convergir o deslocamento para a posição de equilíbrio de forças, sendo esse o ponto que diferencia o método de Newton-Raphson do método puramente Incremental.

Ainda, Newton-Raphson parte do princípio que ao aplicar determinada carga na estrutura, esta responde com intensidade de força diferente, gerando as forças residuais não equilibradas, sendo estas reaplicadas até o vetor ψ ser nulo ou estar abaixo de uma tolerância

definida. Consequentemente, o valor de variação do deslocamento δu a ser adicionado também deve tender a zero.

A Figura 4-11 ilustra o desenvolvimento de uma etapa de incremento de carga e a sequência das iterações para a convergência da solução.

Figura 4-11 - Método de Newton-Raphson tangente



FONTE: Lourenço (1999)

Extrapolando a dedução anterior para múltiplos graus de liberdade tem-se uma matriz de rigidez e vetores de forças residuais, externas e restauradoras. Partindo do equilíbrio de vetores de forças:

$$\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{f} - \underset{\sim}{r} \quad (148)$$

$$\underset{\sim}{r}(u^k) + \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \underset{\sim}{U}}(\underset{\sim}{u}^k) \Delta \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}^k) \quad (149)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \underset{\sim}{U}}(\underset{\sim}{u}^k) \Delta \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\psi}(\underset{\sim}{u}^k) \quad (150)$$

onde a derivação do vetor de forças residuais em relação aos deslocamentos representa a matriz de rigidez tangente do elemento:

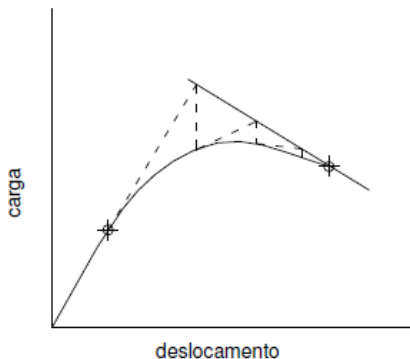
$$\underset{\sim}{k}^T = \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \underset{\sim}{U}} \quad (151)$$

Existem ainda uma modificação do método de Newton-Raphson, onde a matriz de rigidez é atualizada apenas no início de cada etapa (nível de carga) chamado de Newton-Raphson modificado, e onde a matriz elástica inicial é utilizada durante todas as etapas e iterações do processo. Este processo também está implementado no programa ANALEST.

Quando é necessário analisar o trecho pós pico da estrutura, o método de Newton-Raphson não é o mais indicado para tal. Isso porque ele tem em seu princípio de ação o incremento positivo sucessivo de carga, enquanto que após o ponto limite de uma estrutura há um decréscimo de carga associado ao aumento de deslocamento. Apesar de se ter a opção de prescrever deslocamentos ao invés de cargas, a convergência torna-se lenta, às vezes impossível, o que prejudica a escolha deste método (Lourenço, 1999).

O método do comprimento do arco é então a opção indicada, Figura 4-12. Este método prevê que seja traçado um plano linear ortogonal à tangente da curva carga *versus* deslocamento em determinado ponto conhecido. Como neste processo tanto a carga quanto o deslocamento sofrem incrementos a cada iteração, o novo plano fornece mais uma equação, de primeiro grau, para seus valores.

Figura 4-12 - Método do Comprimento do Arco, Wemper (1971) e Riks (1972) *apud* Stramandinoli (2007)

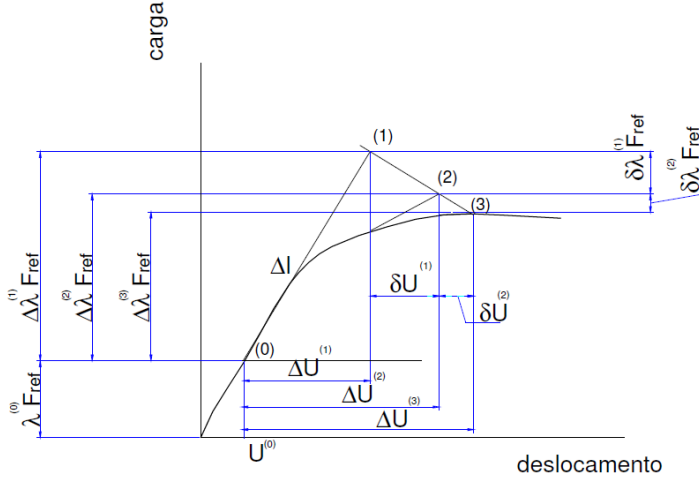


FONTE: Stramandinoli (2007)

O vetor de forças aplicadas é reescrito como um vetor de forças normalizado (ou vetor de referência) multiplicado por um fator de proporção ($\Delta\lambda$):

$$\{F\} = \Delta\lambda \{F_{ref}\} \quad (152)$$

Figura 4-13 - Variáveis do Método do Comprimento do arco, Wemper (1971) e Riks (1972) *apud* Stramandinoli (2007)



FONTE: Stramandinoli (2007)

Baseando-se na ortogonalidade entre o vetor 01 e o vetor 12, por propriedade o produto escalar deles é nulo:

$$\vec{01} = (\Delta\lambda^{(1)} \{F_{ref}\}, \{\Delta U\}^{(1)})^T \quad (153)$$

$$\vec{12} = (-\delta\lambda^{(1)} \{F_{ref}\}, \{\delta U\}^{(1)})^T \quad (154)$$

$$(\Delta\lambda^{(1)} \{F_{ref}\}, \{\Delta U\}^{(1)})^T \begin{bmatrix} -\delta\lambda^{(1)} \{F_{ref}\} \\ \{\delta U\}^{(1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (155)$$

onde a expansão dessa multiplicação fornece o valor de $\delta\lambda$, que é o incremento do fator de multiplicação do vetor de forças:

$$-\Delta\lambda^{(1)} \delta\lambda^{(1)} \{F_{ref}\}^T \{F_{ref}\} + \{\Delta U^{(1)}\}^T \{\delta U^{(1)}\} = 0 \quad (156)$$

4.9. SOFTWARE ANALEST

A formulação de elementos finitos de barra para análise não linear de pórticos planos utilizada neste trabalho foi implementada

anteriormente no programa computacional ANALEST, desenvolvido na linguagem FORTRAN 90. A versão atual é resultado de modificações realizadas no programa NOPLAN, desenvolvido por La Rovere (1990). Chimello (2003) o adaptou para a análise de vigas reforçadas com fibra de carbono e Stramandinoli (2007) o estendeu para avaliar pórticos planos, além de introduzir modelos mistos (barra combinado com elementos planos), modelos de barra de Timoshenko, um novo modelo de *tension-stiffening* e o Método do Comprimento do Arco, para solução de sistemas não lineares.

O programa ANALEST é composto de diversos módulos (subprogramas), os quais são interligados por arquivos binários, visando a otimização do processamento e redução de memória. A entrada de dados é realizada por meio de um arquivo de texto (criado no *Notepad* ou outro programa editor de texto); os diversos módulos geram arquivos de saída de resultados e arquivos binários para a comunicação entre os módulos. São utilizadas bibliotecas estáticas para gerenciamento dos arquivos.

Detalhes da implementação, como tipos e funções de cada módulo, podem ser encontradas em Stramandinoli (2007).

4.10. LIMITAÇÕES DO MODELO

Nos itens anteriores foram descritas as formulações usadas para descrever as não linearidades geométrica e física da estrutura no modelo numérico implementado no *software* ANALEST. Admite-se neste trabalho que as considerações e simplificações feitas neste modelo são suficientes para os estudos propostos inicialmente no capítulo 1.

No entanto, deve-se alertar que existem limitações neste modelo numérico, tanto para que o programa ANALEST não seja utilizado indevidamente na análise de pórticos genéricos, como para auxiliar na interpretação dos resultados dos exemplos a serem analisados no próximo capítulo:

- (i). a modelagem da estrutura é feita por elementos de barra de pórtico plano. Edificações reais são compostas por vigas e colunas tridimensionais e as estruturas portantes são formadas por pórticos tridimensionais, mesmo que o contraventamento previsto seja por pórtico plano;
- (ii). não se considera a existência de lajes, nem seu efeito de aumento da rigidez lateral do pórtico;
- (iii). no modelo de barra de Euler-Bernoulli despreza-se o efeito da deformação por cisalhamento, o que é uma boa aproximação

para os pórticos a serem estudados neste trabalho, os quais possuem barras longas em relação à altura de sua seção e apresentam comportamento predominante de flexão. No caso de pórticos com deformação por cisalhamento significativa (vigas altas ou pilares-parede) ou naqueles com armadura de estribos insuficiente, deve-se utilizar o modelo de barra de Timoshenko.

- (iv).o modelo constitutivo do concreto não leva em conta o confinamento (passivo) do mesmo proveniente da armadura transversal (estribos). O efeito do confinamento do concreto é importante principalmente em pilares, havendo um aumento da resistência e da ductilidade do pilar sob cargas axiais elevadas de compressão, mas para sua consideração deve-se utilizar um modelo constitutivo 3D. Existe a possibilidade de considerar este efeito de maneira aproximada no programa ANALEST (ver Figura 4-6), mas não foi utilizada neste trabalho.
- (v). os efeitos de retração e fluência do concreto não são considerados.

5. ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE CA – COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS E INFLUÊNCIA DAS NÃO LINEARIDADES

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo investiga-se o comportamento não linear de pórticos planos de concreto armado utilizando-se o programa ANALEST. Foram selecionados para o estudo seis diferentes pórticos, sendo divididos em número de andares (P1 com 1 pavimento, P2 com 4 pavimentos, P3 com 6 pavimentos, P4 com 8 pavimentos, P5 com 12 pavimentos e P6 com 16 pavimentos). Deve-se comentar que os pórticos selecionados já foram analisados por outros autores.

Descrevem-se inicialmente os pórticos escolhidos, suas características geométricas, armaduras e as propriedades dos materiais, que são as mesmas utilizadas nos trabalhos dos outros autores. As propriedades que não foram citadas nos respectivos trabalhos, ou foram calculadas utilizando-se equações contidas em normas, ou foram adotados valores usuais de projeto.

Antes de se efetuar as análises dos seis pórticos selecionados com o programa ANALEST, foram feitos alguns estudos de modelagem mostrados no Apêndice A e de estabilidade numérica e eficiência dos algoritmos de resolução das equações não lineares. Os resultados destes estudos são resumidos abaixo.

- Não houve diferença considerável ao se discretizar a seção dos elementos em 10 ou 20 camadas (ver Apêndice A.1). No entanto, optou-se em se utilizar 20 camadas em todas as análises para se observar melhor o espraçamento das não linearidades ao longo da altura da seção, o que também está de acordo com a recomendação de Chimello *et al.* (2003).
- Também não houve diferença significativa entre os resultados dos pórticos ao se utilizar diferentes modelos constitutivos para o concreto sob compressão (ver Apêndice A.2). Selecionou-se então, para as análises de todos os pórticos com o ANALEST, a curva constitutiva proposta pelo CEB-90, descrita no item 4.6.1, de forma a facilitar a comparação com as análises de outros autores, tendo em vista que neste modelo o módulo de elasticidade do concreto é constante no trecho inicial.

- Devido à variação da posição dos pontos de inflexão dos diagramas de momento fletor nas barras que ocorre em análise não linear de pórticos planos, o modelo de *tension-stiffening* desenvolvido por Stramandinoli e La Rovere (2008) foi aplicado em todas as camadas da seção dos elementos que estejam submetidas à tração, após a fissuração, ao invés de ser aplicado apenas nas camadas correspondentes à altura efetiva da seção (ver equação (119) no item 4.6.2 e detalhes no Apêndice A.2)
- Em todas as análises com ANALEST utilizou-se o algoritmo Newton-Raphson tangente, devido à estabilidade numérica e esforço computacional reduzido.

Para todos os pórticos estudados buscou-se utilizar no programa ANALEST o mesmo módulo de elasticidade do concreto adotado pelo respectivo autor que estudou determinado pórtico. Quando este não foi especificado utilizou-se a fórmula do módulo de elasticidade do modelo constitutivo do CEB-90 (item 4.6.1).

Da mesma forma, quando não havia indicação prévia do valor da resistência à tração do concreto, adotou-se a equação (118), recomendada pela NBR-6118/2007.

Nas análises dos pórticos, foram aplicadas cargas verticais e laterais ou horizontais, nos pórticos, sendo estas cargas majoradas (cargas de projeto ou de cálculo), as usadas para o dimensionamento das armaduras do pórtico, considerando-se uma única combinação de cargas. Apresentam-se, como resposta, gráficos “carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo”, sendo denominada de carga última a carga lateral máxima atingida por cada modelo não linear. O estudo de cada estrutura é composto por quatro partes descritas a seguir.

A primeira parte objetiva validar o modelo implementado no programa ANALEST, comparando-se seus resultados com os resultados numéricos obtidos de outros modelos/programas de outros autores.

Na segunda parte realiza-se uma investigação da influência de cada uma das não linearidades, considerada isoladamente, no comportamento do pórtico. O programa ANALEST é utilizado para as seguintes análises:

- (i) elástico linear (EL);
- (ii) considerando apenas a não linearidade física (NLF);
- (iii) considerando apenas a não linearidade geométrica (NLG);

- (iv) considerando ambas não linearidades, física e geométrica, (NLGF).

O último modelo do ANALEST, NLGF, é o modelo de referência. É importante ressaltar que as não linearidades devem ser consideradas simultaneamente em uma estrutura real. O objetivo desse estudo é apenas identificar qual das não linearidades causa maior perda de rigidez na estrutura e também possibilitar a comparação com os resultados de outros autores que consideraram apenas um tipo de não linearidade nas análises.

Na terceira parte do estudo, descreve-se o espraçamento da não linearidade física nos pórticos ao longo da história de carregamento, por meio de um “mapa”, que indica as camadas da seção transversal de cada elemento e quais elementos onde há ocorrências importantes, tais como fissuração, escoamento do aço, pico de compressão do concreto e ruptura do aço.

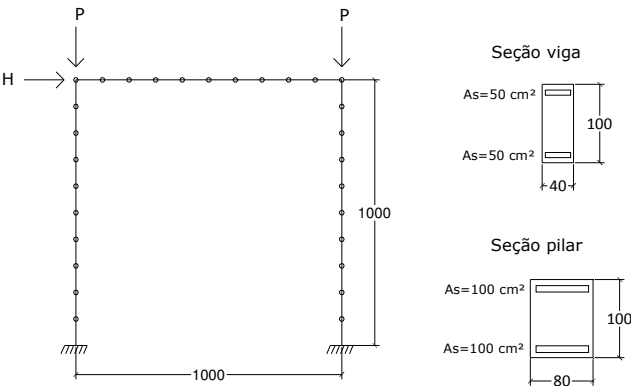
Finalmente, na quarta parte, é realizada uma comparação entre resultados do modelo não linear do ANALEST com um modelo que considera a não linearidade física de forma simplificada, utilizando-se o programa SAP2000.

5.2. DESCRIÇÃO DOS PÓRTICOS

5.2.1. P1

O primeiro pórtico escolhido foi o estudado por Oliveira (2007), o qual apresenta um vão simples, de 10 m, apenas um pavimento com altura de 10 m e bases engastadas. A seção das vigas é de 40 cm x 100 cm centímetros e dos pilares é de 80 cm x 100 cm centímetros. Utilizou-se nas análises as mesmas armaduras utilizadas por Oliveira (2007), armadura simétrica com área de 50 cm² e 100 cm² para as vigas e pilares, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 5-1.

Figura 5-1 - P1: Malha e seção transversal das barras (dimensões em centímetros)



Foram adotados os mesmos dados dos materiais concreto e aço utilizados por Oliveira (2007), com o intuito de possibilitar a comparação com o modelo da autora no item 5.3.

Oliveira (2007) adotou a resistência a compressão do concreto de 17,5 MPa, e para a resistência à tração 10% deste valor, logo 1,75 MPa. O módulo de elasticidade do concreto utilizado pela autora foi 27000 MPa, sem indicação de como foi calculado. Quanto ao aço das armaduras, foi admitido módulo de elasticidade de 210 GPa e tensão de escoamento de 420 MPa.

Os valores de deformação do concreto no pico de compressão (ϵ_0), deformação correspondente à ruptura do aço (ϵ_s) e o coeficiente de *strain-hardening* (S.H.) foram arbitrados segundo os valores utilizados por Stramandinoli (2007) em suas análises. Um resumo dos dados dos materiais encontra-se nas Tabelas 5-1 e 5-2, mostrando-se em **negrito** os valores utilizados por Oliveira (2007).

Tabela 5-1 - Parâmetros do concreto

Concreto				
<i>fck</i> [MPa]	<i>fctm</i> [MPa]	ϵ_0	Nº camadas	E [MPa]
17,5	1,75	0,002	20	27000

Tabela 5-2 - Parâmetros do aço

Aço			
E [GPa]	f_y [MPa]	ϵ_s	S.H.
210	420	0,02	0,02

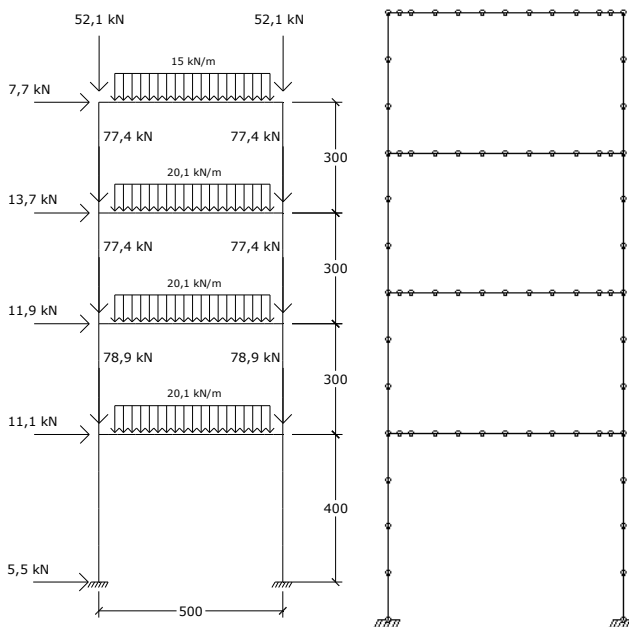
Na modelagem do pórtico dividiu-se os pilares e as vigas em 10 elementos de 1 metro de comprimento, gerando uma malha de elementos finitos de 30 elementos e 31 nós.

Há apenas cargas concentradas aplicadas nos nós do pórtico, sendo que no nó da extremidade esquerda da viga há carga concentrada lateral H e carga concentrada vertical P, enquanto à direita há apenas a carga concentrada vertical P. As cargas P e H são consideradas com valores iguais e são aplicadas de forma monotonicamente crescente em incrementos iguais ao longo da análise. Como não há indicação do valor das cargas aplicadas, foi admitido um incremento inicial de 50 kN, sendo reduzido ao longo da análise quando necessário. A malha e a disposição de cargas estão apresentadas na Figura 5-1.

5.2.2. P2

O segundo pórtico escolhido foi o analisado por Pitta (1996) e posteriormente por Banki (1999). Este pórtico tem apenas um vão de 5 metros, quatro pavimentos e a base dos pilares é engastada. O primeiro andar tem pé direito de 4 m, e os três restantes têm pé direito de 3 m. A altura total do pórtico resulta em 13 m (ver Figura 5-2). Os pilares apresentam seção transversal de 30 cm x 20 cm centímetros e as vigas 13 cm x 55 cm.

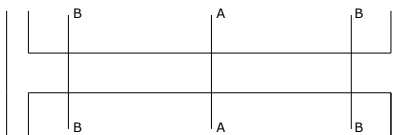
Figura 5-2 - P2: Malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)



Banki (1999) e Pitta (1996) realizaram análise não linear geométrica deste pórtico considerando material elástico linear, assim sendo não apresentaram as armaduras. Neste trabalho, para que fosse possível se estender posteriormente a análise incluindo-se também a não linearidade física, o dimensionamento das armaduras do pórtico foi realizado seguindo-se as recomendações da NBR-6118/2007. Realizou-se primeiramente uma análise elástico linear do pórtico para obtenção dos esforços, a partir dos quais dimensionaram-se os pilares e as vigas à flexão normal composta. Como se optou por estudar pórticos com comportamento dominante de flexão, o modelo de barras utilizado pelo programa ANALEST é o de Euler-Bernoulli e a armadura transversal das peças não foi dimensionada.

As armaduras das vigas estão separadas em duas seções, a primeira para o momento negativo e a segunda para o momento positivo. Como armadura construtiva adotou-se duas barras de 6,3 mm de diâmetro. Já a armadura dos pilares está separada em andares, Tabela 5-5. Detalhes das armaduras estão na Figura 5-3.

Figura 5-3 - P2: Localização das seções tipo A e B nas vigas



O valor da resistência à compressão do concreto considerado é 23,24 MPa, enquanto a resistência à tração foi calculada segundo a equação (118). O módulo de elasticidade foi admitido por Banki (1999) e Pitta (1996) como 27000 MPa.

Quanto à resistência à compressão do concreto, Banki não a indica, enquanto que Pitta admite 15 MPa. Para este estudo, o valor do f_c foi retirado a partir do valor do módulo de elasticidade utilizando-se a equação (1). A deformação do concreto correspondente à tensão máxima foi arbitrada segundo valores usuais de projeto.

O aço admitido para as armaduras foi o CA-50, com deformação última e coeficiente de *strain-hardening* arbitrados conforme mostrado na Tabela 5-4, baseados nos valores usados por Stramandinoli (2007).

Todos os parâmetros utilizados nas análises estão mostrados na Tabela 5-3 e 5-4. Os valores usados por Banki e Pitta estão apresentados em negrito, e os demais valores foram arbitrados.

Tabela 5-3 - Parâmetros do concreto

Concreto				
f_{ck} [Mpa]	f_{ctm} [Mpa]	ϵ_0	Nº camadas	E [Mpa]
23,24	2,443	0,002	20	27000

Tabela 5-4 - Parâmetros do aço

Aço			
E [Gpa]	f_y [Mpa]	ϵ_s	S. H.
210	500	0,02	0,01

Na modelagem deste pórtico os pilares foram divididos em elementos de 1 metro, enquanto as vigas foram divididas em 8 elementos centrais de 0,5 metro de comprimento, e dois elementos em cada extremidade de 0,25 metro. Essa divisão se deu pelo fato de a viga de cobertura necessitar de armadura negativa nas duas extremidades, obrigando essa divisão, e, para se padronizar, a malha foi repetida nas vigas inferiores.

Tabela 5-5 - P2: Armadura das seções

Seção	Peça	Tipo	Cota [m]	Armadura [cm ²]	
1	Pilar	-	0 - 4	A_s Superior	6,7
				A_s Inferior	6,7
2	Pilar	-	4 - 13	A_s Superior	3,5
				A_s Inferior	3,5
3	Viga	A	4	A_s Superior	0,63
				A_s Inferior	5,0
4	Viga	B	4	A_s Superior	6,75
				A_s Inferior	5,0
5	Viga	A	7	A_s Superior	0,63
				A_s Inferior	2,24
6	Viga	B	7	A_s Superior	3,0
				A_s Inferior	2,24
7	Viga	A	10	A_s Superior	0,63
				A_s Inferior	2,0
8	Viga	B	10	A_s Superior	2,0
				A_s Inferior	2,0
9	Viga	B	13	A_s Superior	1,5
				A_s Inferior	1,5
10	Viga	A	13	A_s Superior	0,63
				A_s Inferior	1,6

No pórtico são aplicadas cargas concentradas nos nós e distribuídas nas vigas. As cargas concentradas horizontais são aplicadas nos nós da lateral esquerda ao longo da altura da estrutura. Já as cargas concentradas verticais são aplicadas nos nós de extremidade das vigas. As cargas distribuídas são aplicadas ao longo do comprimento das vigas e para entrada de dados no ANALEST foram transformadas em ações de engastamento perfeito. Todas as cargas são aplicadas de forma

incremental na análise. A malha e as cargas estão apresentadas na Figura 5-2.

5.2.3. P3

Esta estrutura, pórtico P3, foi apresentada e analisada por Pinto (2002). O pórtico apresenta apenas um vão de 5 m, seis pavimentos de pé direito igual a 3 m, totalizando 18 m de altura, sendo a base dos pilares engastada. As vigas têm seção de 20 cm x 50 cm e, os pilares, seção de 35 cm x 35 cm. As armaduras das vigas e pilares encontram-se detalhadas em Pinto (2002).

O autor admitiu resistência do concreto de 20 MPa para análise linear e 23,5 MPa para análise não linear. A resistência à tração foi calculada com a equação (118), porém considerando a resistência do concreto à compressão de 20 MPa, que é o valor para análise linear. Pinto (2002) também definiu o módulo de elasticidade do concreto, sem indicação de qual fórmula usou para tal. Foi utilizado aço CA-50 para as armaduras e o coeficiente de *strain-hardening* foi calculado como a razão entre o módulo de elasticidade do aço antes e após o escoamento (Stramandinoli, 2007), sendo que o último tem valor de 1000 MPa, ambos fornecidos por Pinto (2002). Todos os parâmetros de material estão resumidos nas Tabelas 5-6 e 5-7, sendo em negrito os valores utilizados por Pinto (2002).

Tabela 5-6 - Parâmetros do concreto

Concreto				
<i>fck</i> [Mpa]	<i>fctm</i> [Mpa]	ϵ_0	Nº camadas	E [Mpa]
23,5	2,2	0,002	20	32000

Tabela 5-7 - Parâmetros do aço

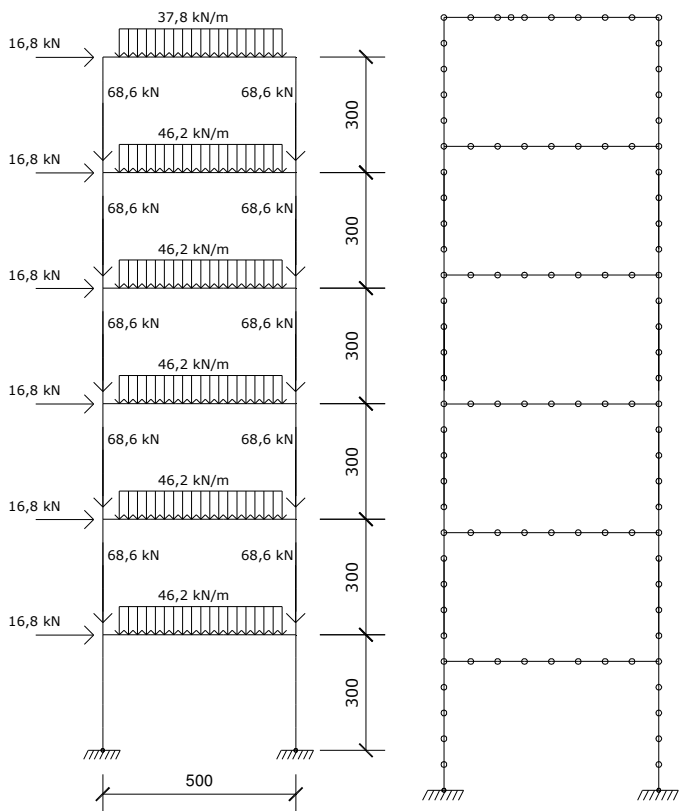
Aço			
E [Gpa]	f_y [Mpa]	ϵ_s	S. H.
210	500	0,01	0,0047

Na modelagem deste pórtico as vigas foram divididas em 8 elementos de 0,625 m e os pilares em 5 elementos de 0,6 m. A viga da cobertura teve o terceiro tramo dividido em dois elementos de 0,312 m, para adaptar um trecho de armadura simétrica.

Cargas concentradas horizontais são aplicadas nos nós à esquerda, com valor constante de 16,8 kN, representando carga de vento. Cargas concentradas verticais incidem nos nós de extremidade das vigas, salvo

a cobertura. Cargas distribuídas são aplicadas ao longo das vigas, com valor diferenciado apenas na cobertura, e para entrada no ANALEST foram transformadas em ações de engastamento perfeito. Todas as cargas são aplicadas incrementalmente ao longo da análise. Informações complementares da malha e cargas encontram-se na Figura 5-4.

Figura 5-4 - P3: malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)



5.2.4. P4

Também estudado por Pinto (2002), este pórtico de base engastada, P4, apresenta três vãos, dois externos com vão de 6 m e um interno com 2,4 m, e 8 pavimentos com 3,6 m de altura, totalizando uma altura de 28,8 m. As vigas apresentam seção transversal de 20 cm x 50

cm e, os pilares, de 37 cm x 37 cm. As armaduras das vigas e pilares encontram-se detalhadas em Pinto (2002).

As propriedades dos materiais foram as mesmas adotadas para o pórtico P3 (item 5.2.3). Todos os parâmetros de material estão resumidos nas Tabelas 5-8 e 5-9, sendo os valores em negrito os utilizados por Pinto (2002).

Tabela 5-8 - Parâmetros do concreto

Concreto				
<i>f_{ck}</i> [Mpa]	<i>f_{ctm}</i> [Mpa]	ϵ_0	Nº camadas	E [Mpa]
23,5	2,2	0,002	20	32000

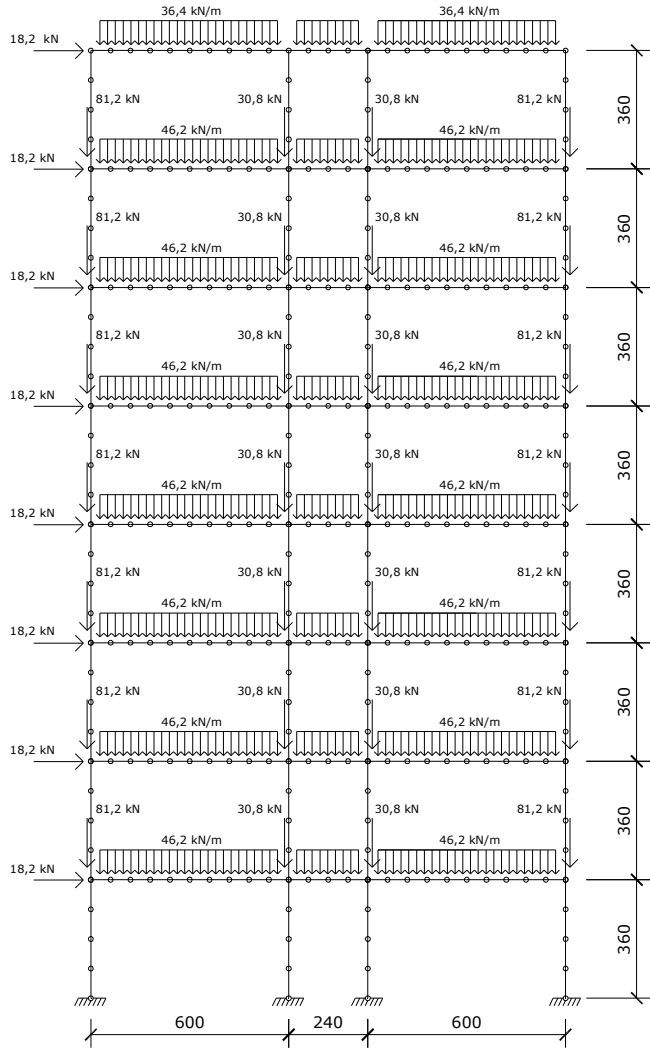
Tabela 5-9 - Parâmetros do aço

Aço			
E [Gpa]	<i>f_y</i> [Mpa]	ϵ_s	S. H.
210	500	0,01	0,0047

Na modelagem deste pórtico, os pilares foram divididos em 4 elementos. Já as vigas dos vãos externos foram divididas em 10 elementos de 0,6 m e a viga interna foi repartida em 4 elementos de 0,6 m.

As cargas concentradas horizontais que atuam na lateral do pórtico têm valor constante de 18,2 kN. Já as cargas concentradas verticais que atuam nas extremidades das vigas, salvo a cobertura, têm um valor nos nós externos e um valor menor nos internos, sendo 81,2 kN e 30,8 kN, respectivamente. As cargas distribuídas que atuam nas vigas têm valor diferenciado na cobertura, e foram transformadas em ações de engastamento perfeito para entrada no programa ANALEST. Todas as cargas são aplicadas incrementalmente ao longo da análise. Informações complementares da malha e cargas encontram-se na Figura 5-5.

Figura 5-5 - P4: malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)



5.2.5. P5

Este pórtico biengastado foi estudado por Alva e Kaminski (2009) e apresenta um vão de 6,5 m e 12 pavimentos de 3 m de altura,

totalizando 36 m de altura. As vigas apresentam seção transversal de 20 cm x 65 cm e os pilares de 50 cm x 50 cm.

No artigo do qual foi extraído este exemplo de pórtico (Alva e Kaminski, 2009) não havia detalhes das armaduras utilizadas, portanto estas foram obtidas diretamente com um dos autores (Alva, 2012), sendo que as armaduras foram corrigidas em relação às usadas no artigo original. Os detalhes das armaduras corrigidas, adotadas neste trabalho, estão mostrados na Figura 5-6 e Tabelas 5-10 e 5-11.

Figura 5-6 - P5: detalhes das seções

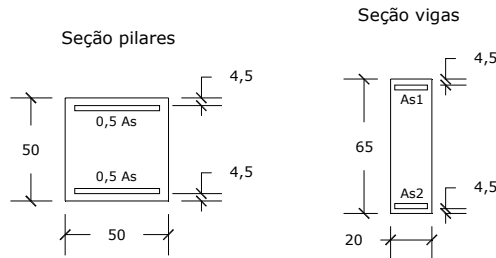


Tabela 5-10 - P5: Armaduras longitudinais dos pilares

Pavimento	As (cm ²)	Pavimento	As (cm ²)
Base – 1	70,00	4 – 5	14,00
1 – 2	36,00	5 – 6	14,00
2 – 3	30,00	6 ao 12	14,00
3 – 4	22,00		

Tabela 5-11 - P5: Armaduras longitudinais das vigas

Pavimento	Apoio esquerdo (cm ²)	Centro (cm ²)	Apoio direito (cm ²)
1-4	As ₁ = 24,13	As ₁ = 1,57	As ₁ = 24,13
	As ₂ = 9,99	As ₂ = 9,99	As ₂ = 9,99
5-8	As ₁ = 19,74	As ₁ = 1,57	As ₁ = 19,74
	As ₂ = 7,50	As ₂ = 7,50	As ₂ = 7,50
9-12	As ₁ = 12,87	As ₁ = 1,57	As ₁ = 12,87
	As ₂ = 4,40	As ₂ = 4,40	As ₂ = 4,40

Quanto às armaduras longitudinais das vigas, indicadas na Tabela 5-11, o comprimento considerado nas vigas tanto do “apoio esquerdo” quanto do “apoio direito” são iguais a 2,60 m. Já o trecho denominado “centro” compreende 1,30 m de comprimento.

Os autores admitiram resistência à compressão do concreto de 25 MPa, e usaram o aço CA-50 para as armaduras.

A resistência à tração do concreto foi calculada segundo a equação (118). O módulo de elasticidade tangente inicial do concreto foi determinado pela fórmula do CEB-90, item 4.6.1. Dados de deformação do concreto sob tensão máxima, deformação última do aço e coeficiente de *strain-hardening* foram arbitrados com base em Stramandinoli (2007). Um resumo dos parâmetros de material utilizados encontra-se nas Tabelas 5-12 e 5-13 (em negrito os valores utilizados por Alva, 2012).

Tabela 5-12 - Parâmetros do concreto

Concreto				
<i>f_{ck}</i> [MPa]	<i>f_{ctm}</i> [MPa]	ϵ_0	N° camadas	E [MPa]
25	2,56	0,002	20	29180

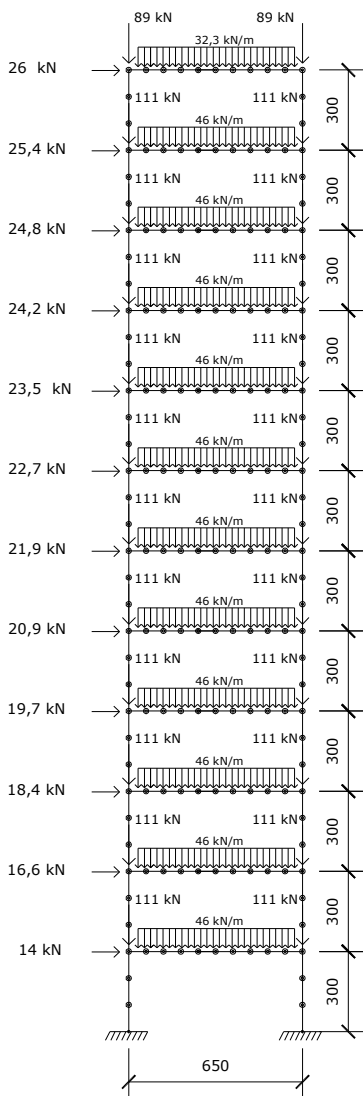
Tabela 5-13 - Parâmetros do aço

Aço			
E [GPa]	<i>f_y</i> [MPa]	ϵ_s	S. H.
210	500	0,02	0,02

Na modelagem deste pórtico, as vigas foram divididas em 10 elementos de 0,65 m e os pilares em 3 elementos de 1 m.

As cargas consideradas são compostas do conjunto de cargas iniciais apresentadas por Alva e Kaminski (2009), combinadas segundo a combinação de cargas onde o vento é a carga variável principal (usada pelos autores como combinação na análise não linear). As cargas concentradas horizontais compreendem o efeito de vento, enquanto as cargas concentradas verticais atuando nos nós correspondem ao efeito de vigas transversais. As cargas distribuídas foram transformadas em ações de engastamento perfeito para entrada no ANALEST. Todas as cargas são aplicadas incrementalmente ao longo da análise. Informações complementares da malha e cargas encontram-se na Figura 5-7.

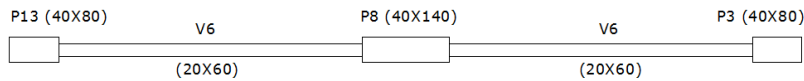
Figura 5-7 - P5: Malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)



5.2.6. P6

Estudado originalmente por Costa (2003) e posteriormente adaptado por Oliveira (2007), o último pórtico, P6, é composto de 2 vãos com 6 m, 16 pavimentos de 3 m, totalizando 48 m de altura (Figura 5-9). As vigas apresentam seção transversal de 20 cm x 60 cm, os pilares externos têm 40 cm x 80 cm e os internos têm 40 cm x 140 cm (Figura 5-8).

Figura 5-8 - P6: Dimensões dos pilares e vigas



A armadura pode ser encontrada em detalhes em Oliveira (2007). O concreto foi admitido com resistência à compressão de 20 MPa, enquanto o módulo de elasticidade do concreto foi calculado pela autora com a equação (1).

A resistência à tração foi calculada para este estudo usando a equação (118). Dados de deformação do concreto sob tensão máxima, deformação última do aço e valor de *strain-hardening* foram arbitrados. Um resumo dos parâmetros de material encontra-se nas Tabelas 5-14 e 5-15, sendo que os valores utilizados de Oliveira (2007) estão apresentados em negrito.

Tabela 5-14 - Parâmetros do concreto

Concreto				
<i>f_c</i> [Mpa]	<i>f_{ctm}</i> [Mpa]	ϵ_0	Nº camadas	E [Mpa]
20	2,21	0,002	20	25043,96

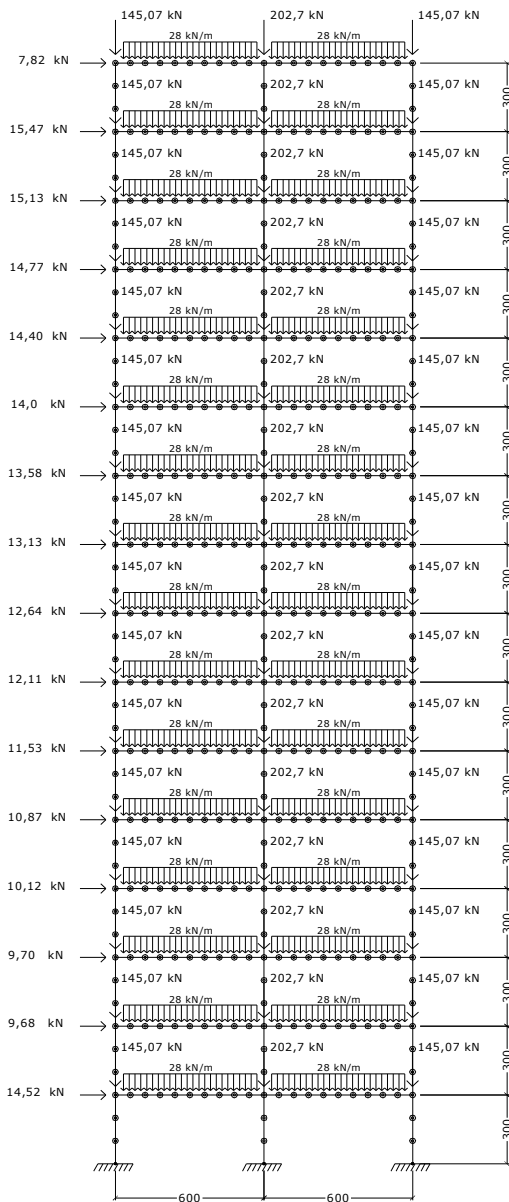
Tabela 5-15 - Parâmetros do aço

Aço			
E [Gpa]	<i>f_y</i> [Mpa]	ϵ_s	S. H.
210	500	0,02	0,01

Na modelagem deste pórtico as vigas foram divididas em 10 elementos de 0,6 m e os pilares em 3 elementos de 1 m. São aplicadas cargas concentradas horizontais nos nós, representando cargas de vento, e cargas concentradas verticais, estas com valor menor nos nós externos e maior nos nós internos, sendo igual a 145,07 kN e 202,7 kN, respectivamente. As cargas distribuídas têm valor constante em todas as

vigas, de 28 kN/m, sendo transformadas em ações de engastamento perfeito para análise com programa ANALEST.

Figura 5-9 - P6: malha e cargas aplicadas (dimensões em cm)



5.3. COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DO MODELO DO ANALEST E OS DE MODELOS DE OUTROS PROGRAMA/AUTORES

5.3.1. Introdução

Neste item apresenta-se uma comparação entre os resultados obtidos das análises com o programa ANALEST com resultados numéricos obtidos de outros modelos por outros autores, dando-se ênfase nos resultados em termos de curvas carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo e valores numéricos de carga última lateral e deslocamento no topo correspondente. Ressalta-se que está se denominando carga última ao valor obtido na última etapa em que se obteve equilíbrio de cada pórtico, imediatamente anterior à etapa correspondente à aplicação de incremento de carga em que ocorreu a ruptura de material ou instabilidade do pórtico. Utilizam-se nesta comparação cinco pórticos dentre os seis descritos no item 5.2. O pórtico P5 não é estudado neste item, pois, conforme explicado no item 5.2.5, após a sua apresentação em Alva e Kaminski (2009), as armaduras do pórtico foram modificadas pelos autores, sendo estas as usadas ao longo deste estudo, e não foram disponibilizados ainda resultados das análises com as armaduras atualizadas, realizadas pelos autores Alva e Kaminski (2009), de forma a possibilitar uma comparação com o ANALEST.

Para todos os pórticos considerou-se a não linearidade física e geométrica no modelo do ANALEST, exceto na análise do pórtico P2, em que se considerou apenas a NLG (para possibilitar a comparação com o modelo utilizado por Banki, 1999).

5.3.2. P1

O pórtico P1, de um único pavimento, foi estudado primeiramente por Silva (1996), que discretizou os pilares e a viga em dez elementos de barra de 1 m. As propriedades dos materiais utilizados por este autor foram as apresentados na Tabela 5-16:

Tabela 5-16 - Propriedades utilizadas por Silva (1996) - P1

f_{cm} [MPa]	ϵ_0	f_y [MPa]	E_s [GPa]
17,5	0,002	420	210

Detalhes das formulações de NLG e NLF utilizadas pelo autor podem ser encontrados no capítulo 3 de revisão bibliográfica. O autor obteve a carga última lateral de 1400 kN, mas não foi apresentada curva carga *versus* deslocamento lateral.

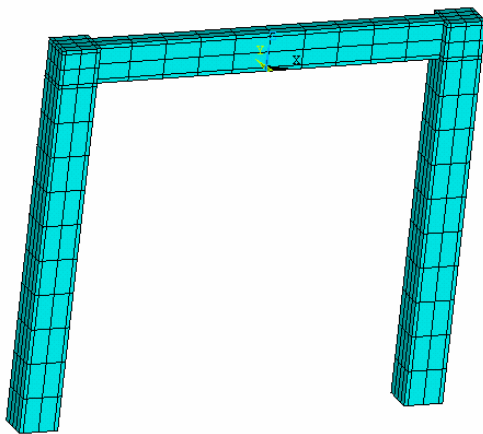
O mesmo pórtico foi posteriormente estudado por Oliveira (2007), que utilizou um modelo tridimensional e tomou os dados de Silva (1996) como base. As propriedades dos materiais utilizadas pela autora estão na Tabela 5-17 (onde ν é o coeficiente de Poisson):

Tabela 5-17 - Propriedades utilizadas por Oliveira (2007) - P1

f_{cm} [MPa]	ν	f_{ctm} [MPa]	E_c [GPa]	f_v [MPa]	E_s [GPa]
17,5	0,2	1,75	27	420	210

Oliveira (2007) analisou este pórtico usando o *software* ANSYS-9.0, modelando os pilares e a viga com o elemento “solid 65”, com armadura dispersa. O modelo constitutivo selecionado para o concreto foi elasto plástico perfeito, com critério de ruptura de William-Warke para tração e o critério de escoamento de Von Mises para compressão. Após o surgimento de uma fissura (avaliando-se o estado de tensões em cada ponto de integração), modifica-se a relação constitutiva tensão *versus* deformação do concreto com a introdução de um plano de fragilidade normal à face da fissura. É introduzido um coeficiente β_c de transferência de cisalhamento, que representa o fator de redução de força de cisalhamento para cargas subseqüentes que incluem cisalhamento através da face da fissura. Um modelo elasto plástico perfeito com critério de Von Mises (para tração e para compressão) também foi utilizado para o aço das armaduras. Foi utilizado o algoritmo de Newton-Raphson tangente para solução das equações de equilíbrio da estrutura. A malha utilizada pela autora está apresenta na Figura 5-10.

Figura 5-10 - Malha usada por Oliveira (2007)



FONTE: Oliveira (2007)

A comparação entre resultados do modelo NLGF do ANALEST e do modelo do ANSYS está mostrada na Figura 5-11, em termos de carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo, e na Tabela 5-18, em termos de valores de carga lateral última e deslocamento lateral no topo correspondente.

Figura 5-11 - Carga X deslocamento - Comparação com Oliveira (2007) - P1

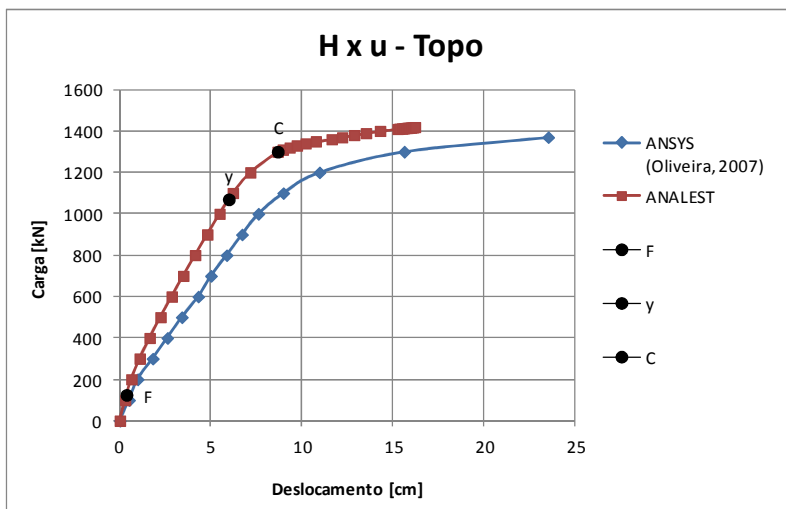


Tabela 5-18 - Comparativo de resultados - Comparação com Oliveira (2007) - P1

Modelo	ANSYS (Oliveira, 2007)	ANALEST	Diferença relativa [%]
Carga última (lateral) [kN]	1370	1419	3,58
Deslocamento (lateral) [cm]	23,5	16,19	31,11

Com base nos resultados da Tabela 5-18 e Figura 5-11, nota-se que o modelo de barras do ANALEST apresentou deslocamentos menores ao longo do histórico de carregamento após a fissuração em comparação com o modelo do ANSYS (Oliveira, 2007), mostrando-se assim um modelo mais rígido.

Observa-se da Figura 5-11 que as curvas obtidas pelos diferentes modelos apresentam um comportamento semelhante, sendo que são praticamente coincidentes até a carga de 125 kN no modelo do ANALEST, e provavelmente em torno dessa carga no modelo do ANSYS (Oliveira, 2007), lembrando que a mesma resistência à tração do concreto foi adotada nos dois modelos.

A partir deste valor de carga as curvas se afastam, sendo que o modelo do ANSYS mostrou-se mais flexível, com maior perda de rigidez após a fissuração. Provavelmente estas diferenças ocorrem devido aos diferentes modelos constitutivos utilizados pelos dois programas após a fissuração do concreto. O início do escoamento ocorreu aproximadamente a 1200 kN no modelo do ANALEST e 1200 kN no modelo do ANSYS (Oliveira, 2007), observando-se uma rigidez pós-escoamento semelhante nos dois modelos. Quanto às cargas finais, o modelo do ANALEST atingiu carga última superior, ficando mais próximo do modelo de Silva (1996), que também era um modelo de barras.

5.3.3. P2

O pórtico P2 foi inicialmente estudado por Pitta (1996) e serviu de base para o estudo realizado por Banki (1999) sobre não linearidade geométrica com modelagem por elementos de barras. O material foi considerado elástico linear.

Banki (1999) estudou quatro formas de considerar a não linearidade geométrica em uma estrutura: processo P-delta; processo da matriz de rigidez geométrica; processo da matriz de rigidez geométrica modificado e processo das funções de estabilidade. Neste subitem comparam-se os resultados do modelo utilizado por Banki (1999), obtidos com o processo da matriz de rigidez geométrica, com os resultados do modelo do ANALEST, considerando a não linearidade geométrica apenas, mantendo o material elástico linear (NLG).

Como Banki (1999) admitiu material elástico linear, a única propriedade de material utilizada foi o módulo de elasticidade: 27000 MPa. A geometria do pórtico e as cargas aplicadas foram mostradas no item 5.2, sendo a comparação feita para aplicação nos modelos da carga de projeto utilizada pelo autor (7,7 kN).

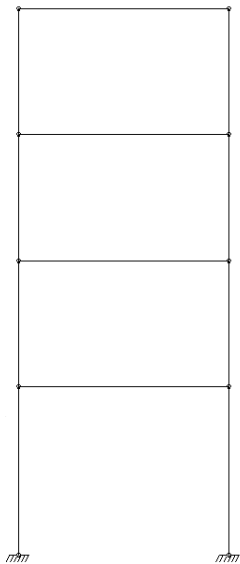
Foram utilizadas duas malhas diferentes para discretizar o pórtico P2: a primeira idêntica à utilizada pelo autor Banki, denominada malha original, com apenas nós nas extremidades das vigas e pilares, apresentada na Figura 5-12; a segunda é uma malha mais fina, denominada malha refinada, mostrada na Figura 5-2 (a mesma utilizada nos modelos do ANALEST que incluíram a não linearidade física, de forma a representar as diferentes armaduras utilizadas).

Tabela 5-19 - Comparativo de resultados entre modelo do ANALEST (NLG) e modelo usado por Banki (1999) - P2

Modelo	Banki (1999)	ANALEST malha original	ANALEST malha refinada
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,7	7,7	7,7
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,866	4,853	5,312
Diferença relativa [%]	-	0,27	9,17

A tabela 5-19 mostra que, para a malha original, na comparação entre o modelo usado por Banki (1999) e o modelo do ANALEST (NLG) a diferença de deslocamento no topo foi muito pequena, 0,27%. Esta pequena diferença pode ser explicada pelo fato do modelo usado por Banki utilizar apenas a matriz de rigidez geométrica (Kg), enquanto que no modelo do ANALEST utiliza-se uma formulação mais completa (com 4 matrizes no total, em que uma delas é a Kg).

Figura 5-12 - Malha utilizada por Banki (1999) - Comparação com Banki (1999) - P2



Utilizando-se a malha refinada no modelo do ANALEST obteve-se uma diferença maior para o deslocamento lateral no topo, em comparação

com o valor obtido por Banki (1999), cerca de 9%, sendo que a utilização da malha refinada no ANALEST resultou em valores maiores de deslocamento, conforme esperado.

Interessante observar que o autor também realizou um estudo de malhas, refinando apenas a discretização dos pilares, mas praticamente não encontrou diferença nos resultados das duas malhas usando o processo da matriz de rigidez geométrica (obteve no topo 4,867 cm com a malha mais fina e 4,866 cm com a malha original, ver Banki, 1999).

5.3.4. P3

O pórtico P3 foi estudado originalmente por Pinto (2002) com três níveis de armadura, sendo o nível B escolhido para este estudo. O autor utilizou uma formulação corrotacional para elemento plano, sem restrições quanto à grandeza de deslocamento e deformações. A modelagem por barras considerou o modelo de Euler-Bernoulli e o algoritmo utilizado para solução das equações não lineares foi o Newton-Raphson modificado. O modelo constitutivo utilizado para concreto descreve o seu comportamento não linear, tanto na compressão como na tração, levando em conta o efeito de *tension-stiffening* e o efeito do confinamento do concreto pelos estribos, de forma aproximada. Para o aço utiliza-se uma curva tensão *versus* deformação bilinear com encruamento positivo. As propriedades dos materiais usadas pelo autor encontram-se na Tabela 5-20.

Tabela 5-20 - Propriedades utilizadas por Pinto (2002) - P3

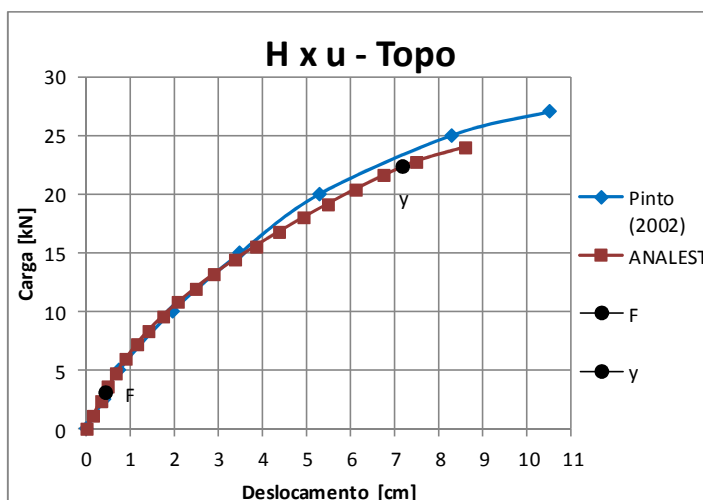
f_{cm} [MPa]	ϵ_0	f_{ctm} [MPa]	E_c [GPa]	f_y [MPa]	E_s [GPa]	ϵ_s
23,5	0,002	2,2	32000	500	210	0,01

Os resultados comparativos estão na Tabela 5-21 e Figura 5-13.

Tabela 5-21 - Comparativo de resultados - Comparação com Pinto (2002) - P3

Modelo	Pinto (2002)	ANALEST	Diferença relativa [%]
Carga última [kN] (lateral)	27	24	11,11
Deslocamento [cm] (lateral)	10,5	8,584	18,25

Figura 5-13 - Carga X deslocamento - Comparação com Pinto (2002) - P3



Na curva do modelo do ANALEST na Figura 5-13 estão identificados os eventos de primeira fissura e primeiro ponto de escoamento do aço.

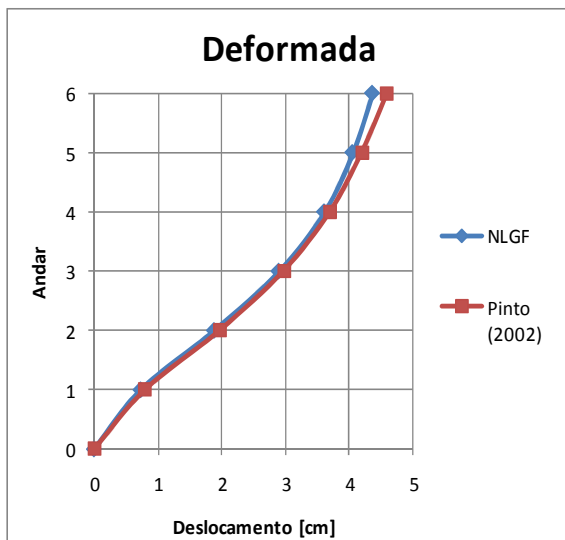
Observa-se da Figura 5-13 que as curvas carga *versus* deslocamento lateral no topo obtidas pelos dois modelos foram bem próximas, coincidindo praticamente até a carga lateral em torno de 15 kN. A partir deste nível de carga o modelo do ANALEST mostrou-se um pouco mais flexível em comparação ao modelo de Pinto (2002), e as duas curvas mantiveram diferença constante. No entanto, o modelo deste autor atingiu carga última superior, 11,11% a mais que a obtida pelo modelo do ANALEST e também um deslocamento último superior (Tabela 5-21). É possível atribuir essa diferença ao efeito do

confinamento do concreto propiciado pelos estribos, admitido no modelo de Pinto (2002).

Pinto (2002) também apresentou a deformada (deslocamentos laterais) do pórtico para seu modelo, para uma carga lateral de projeto igual a 16,8 kN, tanto considerando ambas as não linearidades como considerando apenas a não linearidade geométrica.

Considerando ambas as não linearidades, comparando-se com a deformada obtida com o modelo do programa ANALEST, a concordância entre os resultados foi satisfatória ao longo de toda a altura do pórtico, ainda que uma pequena diferença tenha sido observada a partir do quarto andar (ver Figura 5-14).

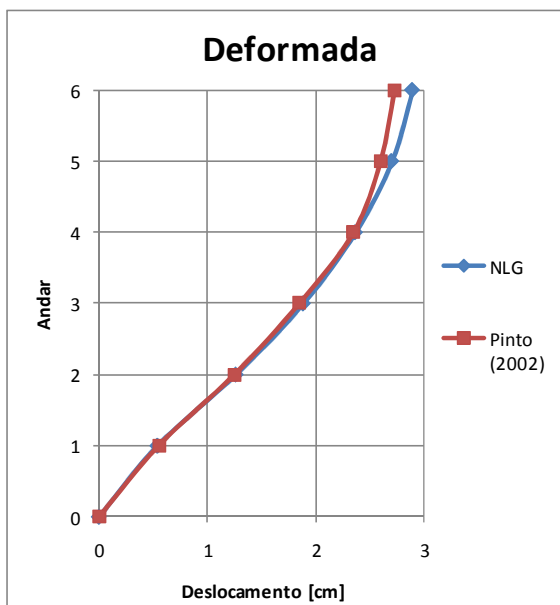
Figura 5-14 – Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLGF) – em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando ambas não linearidades - P3



Considerando apenas a não linearidade geométrica, também houve uma boa concordância entre os resultados do modelo do programa ANALEST e os obtidos por Pinto (2002) ao longo da altura do pórtico, conforme mostra a Figura 5-15, sendo novamente observada uma pequena diferença a partir do quarto pavimento.

De uma maneira geral houve uma boa concordância entre os resultados do modelo do ANALEST em relação ao modelo de Pinto (2002) para este exemplo, pórtico P3.

Figura 5-15 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLG) em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando apenas não linearidade geométrica – P3



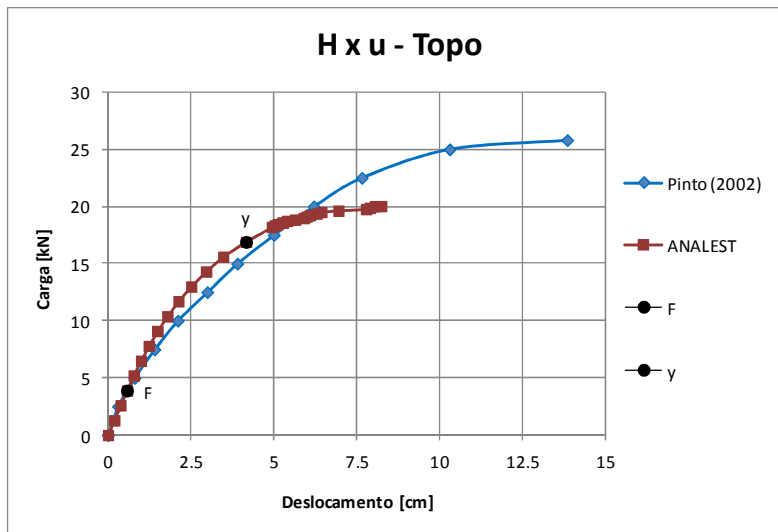
5.3.5. P4

O pórtico P4 também foi estudado por Pinto (2002), utilizando a mesma formulação e considerações na análise descritas no item 5.2.3. As propriedades dos materiais usados pelo autor são mostradas na Tabela 5-20. Os resultados comparativos em termos de gráfico carga lateral *versus* deslocamento lateral estão na Figura 5-16 e resultados numéricos na Tabela 5-22.

Tabela 5-22 - Comparativo de resultados - Comparação Pinto (2002) - P4

Modelo	Pinto (2002)	ANALEST	Diferença relativa [%]
Carga de projeto [kN] (lateral)	25,8	20,034	22,35
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	13,85	8,234	40,55

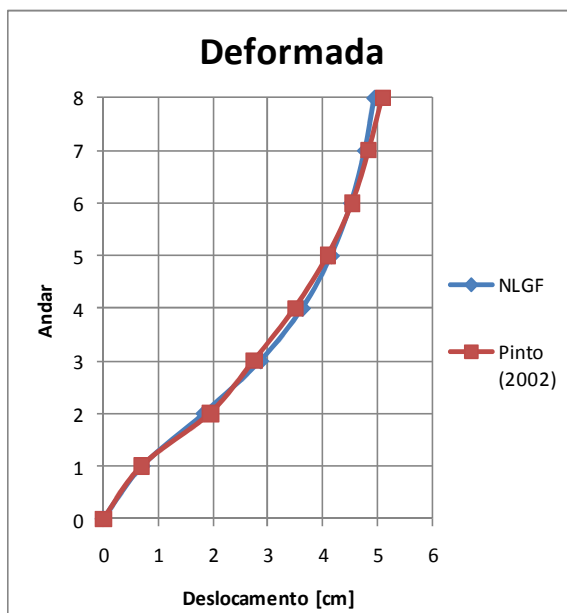
Figura 5-16 - Carga X deslocamento - Comparação com Pinto (2002) - P4



Da Figura 5-16 nota-se que as curvas carga versus deslocamento dos modelos apresentam comportamento semelhante até um certo nível de carga, sendo coincidentes até aproximadamente 5 kN, e a partir deste valor de carga o modelo de Pinto (2002) mostra-se um pouco mais flexível até cerca de 19 kN. Por outro lado, a partir deste valor, o modelo de Pinto (2002) torna-se mais rígido que o modelo do ANALEST, o qual perde substancialmente rigidez a partir da carga de 16 kN, correspondente ao início de escoamento do aço no modelo. O modelo de Pinto atingiu uma carga última e deslocamento correspondente consideravelmente superior aos valores atingidos pelo modelo do ANALEST (ver Tabela 5-22), mostrando um comportamento mais dúctil, possivelmente devido à consideração do efeito de confinamento do concreto dado pelos estribos (efeito não considerado no modelo do ANALEST).

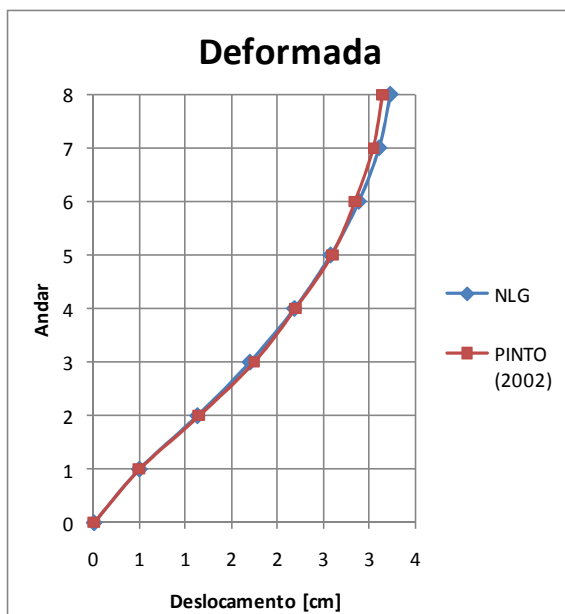
A deformada (deslocamentos laterais) obtida pelos modelos do ANALEST e de Pinto (2002) considerando-se as duas não linearidades estão apresentadas na Figura 5-17, e referem-se à carga lateral de projeto de 18,2 kN. Nota-se que as deformadas são praticamente coincidentes ao longo de toda a altura do pórtico para este nível de carga.

Figura 5-17 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLGF) – em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando ambas não linearidades - P4



Da mesma forma, a deformada obtida pelos dois modelos considerando apenas a não linearidade geométrica e carga lateral de 18,2 kN está apresentada na Figura 5-18. Novamente os dois modelos apresentam resultados bem próximos ao longo de toda a altura do pórtico, salvo pequena diferença no último pavimento.

Figura 5-18 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLG) em comparação com a obtida por Pinto (2002), considerando apenas não linearidade geométrica - P4



5.3.6. P6

O pórtico P6 foi apresentado primeiro por Costa (2003) e, posteriormente, adaptado por Oliveira (2007). Oliveira (2007) realizou a análise não linear geométrica e física do pórtico no programa ANSYS-9.0, modelando-o com elemento sólido (*solid 65*), admitindo armadura dispersa nas três direções, tanto para pilares quanto para vigas. A formulação da não linearidade geométrica utilizada, por se tratar de elemento sólido, admite grandes rotações e deformações no sólido e possíveis mudanças de área e espessura dos elementos. Foi adotado o critério de Willam-Warnke para o concreto à compressão com a condição de ruptura desabilitada e substituída por condição de plastificação segundo critério de escoamento de Von Mises. O último critério também foi utilizado para modelar o aço. Foi utilizado no ANSYS o mesmo modelo constitutivo para o concreto após a fissuração usado para a análise do pórtico P1, descrito anteriormente (ver item

5.3.1). Nos critérios de Von Mises foram admitidos diagramas bilineares, representando um comportamento elasto plástico perfeito.

Ressalta-se que as vigas foram dimensionadas à flexão normal composta e os pilares à flexão normal composta ou flexão oblíqua. Neste exemplo, Oliveira (2007) considerou as deformações por cisalhamento na análise. Foi utilizado o método de Newton-Raphson tangente para solução das equações não lineares. Mais detalhes das considerações de Oliveira (2007) podem ser encontrados na tese da autora, sendo alguns descritos no item 3.1 deste trabalho. As propriedades dos materiais utilizados pela autora encontram-se na Tabela 5-23.

O modelo do ANALEST seguiu os parâmetros apresentados no item 5.2.6. Resultados de deslocamento lateral no topo sofrido pelos modelos encontram-se na Tabela 5-24 e as curvas carga *versus* deslocamento lateral no topo são mostradas nas Figuras 5-19 e 5-20.

Tabela 5-23 - Propriedades utilizadas por Oliveira (2007) - P6

f_{cm} [MPa]	E_c [MPa]	ν	f_y [MPa]	E_s [GPa]
20	25043,96	0,2	500	210

Tabela 5-24 - Comparativo de resultados - Comparação com Oliveira (2007) - P6

Modelo	ANSYS (Oliveira, 2007)	ANAEST	Diferença relativa [%]
Carga de projeto (lateral) [kN]	7,82	7,82	-
Deslocamento no topo (lateral) [cm]	7,6	7,004	7,84

Figura 5-19 - Carga x deslocamento (a) - Comparação com Oliveira (2007) – P6

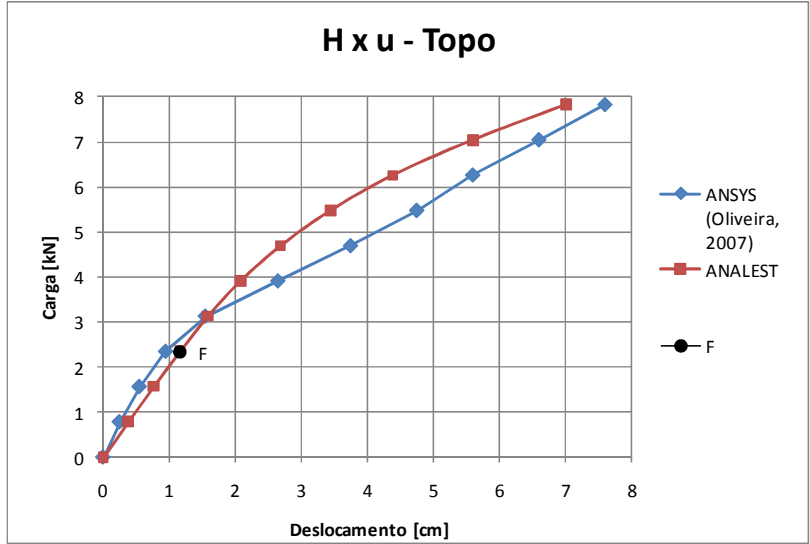
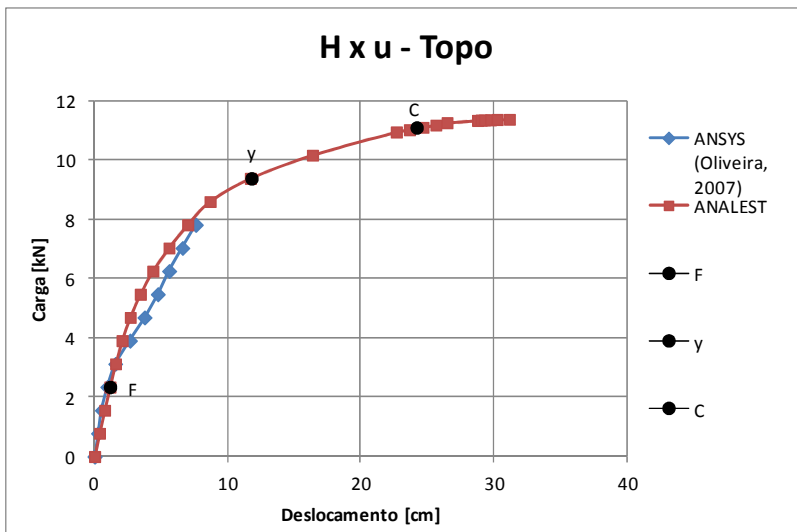


Figura 5-20 - Carga X deslocamento (b) - Comparação com Oliveira (2007) - P6

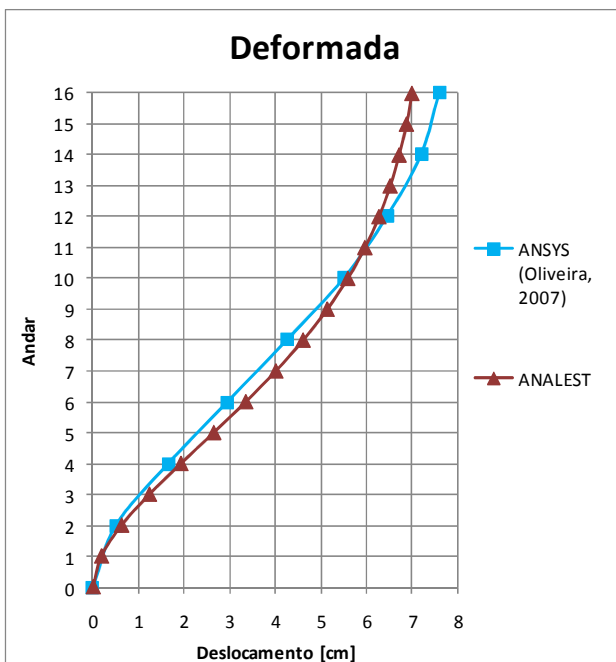


Da Tabela 5-24 nota-se que os dois modelos apresentaram o mesmo valor de carga última, mas uma certa diferença entre os deslocamentos no topo, sendo o deslocamento obtido pelo ANALEST 7,84% menor do que o obtido pelo ANSYS. Observa-se da Figura 5-19 que o modelo do ANSYS (Oliveira, 2007) apresentou rigidez inicial um pouco maior que o modelo do ANALEST, provavelmente devido à diferença entre modelagem – elementos sólidos no ANSYS e de barra 2D no ANALEST. No entanto, após a carga de 3kN, o modelo do ANSYS mostrou uma maior perda de rigidez em comparação ao modelo do ANALEST, mantendo uma rigidez constante a partir deste ponto. Já o modelo do ANALEST mostrou uma perda de rigidez gradativa a partir da carga de 2,346 kN, onde a primeira fissura foi identificada. Neste modelo não ocorreu escoamento do aço das armaduras até a carga de projeto, assim a perda de rigidez observada nos resultados do ANALEST é a evolução da fissuração nos elementos. A diferença na rigidez após a fissuração obtida pelo modelo do ANSYS e do ANALEST pode ser explicada pela adoção de diferentes modelos constitutivos.

De uma maneira geral os resultados dos dois modelos apresentaram correspondência satisfatória ao longo da história de carregamento.

As deformadas (deslocamentos laterais) obtidas pelos modelos do ANSYS (Oliveira, 2007) e do ANALEST estão comparadas na Figura 5-21 para carga de projeto (7,82 kN). Do segundo até o décimo pavimento, os deslocamentos do modelo do ANALEST foram um pouco maiores aos obtidos pelo modelo do ANSYS, e a partir do décimo segundo pavimento ocorre o contrário, sendo um pouco maiores os deslocamentos obtidos pelo modelo do ANSYS nos pavimentos superiores, inclusive o do topo.

Figura 5-21 - Deformada obtida pelo modelo do ANALEST (NLGF) – em comparação com a obtida por Oliveira (2007), considerando ambas não linearidades - P6



5.3.7. Comentários das análises

Com relação aos modelos tridimensionais utilizados por Oliveira (2007) com o programa ANSYS para os pórticos P1 e P6, em comparação ao modelo de barra 2D do ANALEST, observou-se uma maior perda de rigidez após a fissuração no modelo do ANSYS. Houve

uma correspondência satisfatória entre as deformadas (deslocamentos laterais) do pórtico P6 ao longo da altura obtidas pelos dois modelos para carga lateral de projeto.

A comparação dos resultados do modelo do ANALEST com o modelo de Banki (1999), que utiliza a matriz de rigidez geométrica, para o pórtico P2 mostrou uma ótima concordância, ao ser utilizada a mesma malha na discretização do pórtico e considerando-se material elástico linear.

Em relação aos modelos estudados por Pinto (2002), para o pórtico P3 houve uma boa correlação entre as curvas carga *versus* deslocamento e também para as deformadas (deslocamentos laterais) do pórtico para carga de projeto ao longo de toda a altura, tanto considerando ambas as não linearidades como apenas a não linearidade geométrica. O modelo de Pinto (2002) atingiu valores últimos de carga e deslocamento um pouco maiores do que os encontrados pelo modelo do ANALEST. Já para o pórtico P4, houve uma boa correlação entre as curvas carga *versus* deslocamento e deformadas (deslocamentos laterais para carga de projeto, considerando as duas não linearidades e apenas para a não linearidade geométrica) apenas até a carga de 16 kN, quando iniciou o escoamento do aço na análise com o modelo do ANALEST. Após este valor o modelo do ANALEST mostrou uma maior perda de rigidez, e o modelo de Pinto (2002) atingiu valores últimos de carga e deslocamento consideravelmente maiores, provavelmente por considerarem o efeito do confinamento do concreto pela armadura de estribos, que aumenta a resistência e ductilidade dos pilares com o aumento do nível de compressão axial.

5.4. INFLUÊNCIA DAS NÃO LINEARIDADES NO COMPORTAMENTO DOS PÓRTICOS

Neste item são apresentados os estudos comparativos que investigam os efeitos de cada não linearidade no comportamento estrutural dos pórticos planos estudados. Em todas as análises as formulações para consideração das não linearidades, implementadas no programa ANALEST, são as descritas no capítulo 4.

Antes de serem apresentados os resultados, são calculados os valores do parâmetro α de instabilidade e do coeficiente γ_z , para haver uma classificação preliminar da característica do pórtico frente aos efeitos de segunda ordem.

O coeficiente γ_z foi calculado considerando uma aproximação da não linearidade física, utilizando a rigidez única de $0,7E_{ci}I_c$ dos

elementos dos pórticos. Os deslocamentos laterais sofridos por cada pavimento, e utilizados para o cálculo do momento de segunda ordem, foram extraídos da análise linear dos pórticos no programa FTool (Martha, 2008)

Os resultados são expressos nos seguintes termos: curvas carga lateral no topo *versus* deslocamento lateral no topo, linha deformada do pórtico (deslocamentos horizontais dos nós à esquerda do pórtico ao longo da altura) e tabelas com resultados numéricos complementares.

A análise em que se consideram ambas as não linearidades, física e geométrica (NLFG), é a mais completa e representativa do comportamento esperado do pórtico, sendo escolhida como a análise de referência, mostrando-se na curva obtida carga *versus* deslocamento lateral no topo os pontos correspondentes ao início de certa não linearidade física (fissuração, escoamento do aço, pico de compressão do concreto e ruptura do aço).

Nas análises a seguir, onde a não linearidade geométrica é considerada isolada no programa ANALEST, a seção dos elementos será considerada bruta, tendo em vista que a inclusão da área de armadura de aço na seção torna o elemento artificialmente mais rígido.

5.4.1. P1

As cargas aplicadas nos pórticos apresentadas no item 5.2 são cargas de projeto, usadas para o dimensionamento dos pórticos. Espera-se que nos estudos não lineares ao longo da dissertação os pórticos atinjam sempre carga última superior à de projeto, já que a resistência dos materiais não é reduzida nas análises utilizando o programa ANALEST.

Como na análise da influência das não linearidades cada um dos modelos (EL; NLG; NLF e NLGF) apresentam carga última diferente, é interessante definir um valor de carga para comparação entre os modelos de cada pórtico, de forma que as análises dos resultados sejam realizadas sob as mesmas condições de carregamento. Para todos os pórticos selecionou-se a carga de projeto para a comparação.

O pórtico P1, estudado por Silva (1996) e Oliveira (2007), apresenta uma situação particular, pois não há informação dos autores sobre a carga de projeto utilizada para o dimensionamento da sua armadura. Assim, será adotado um conceito de segurança do ACI-318/2005 para se definir um valor de carga para comparação dos modelos. O ACI-318/2005 exige que a razão entre a resistência de cálculo nominal e a resistência última da estrutura seja maior ou igual a

um fator de redução, ou *reduction factor* (φ), que sempre tem valor inferior a 1. O seu valor depende da forma de ruptura da seção de concreto armado; se a ruptura for dúctil, ou controlada por escoamento do aço na tração, $\varphi=0,9$, caso a ruptura seja controlada por esmagamento do concreto, $\varphi=0,65$.

Como não se sabe qual a forma de ruptura das seções do pórtico P1, será adotado um valor médio entre aqueles indicados no ACI-318/2005, resultando em $\varphi=0,775$. Assim, considerando-se que a carga última atingida pelo pórtico P1 em análises anteriores foi de 1419,0 kN, a carga de projeto teórica a ser admitida para análise da influência das não linearidades é 1100 kN. Para os demais pórticos a carga de projeto foi informada pelos respectivos autores.

Aplicando-se as equações descritas no capítulo 2, calculam-se os parâmetros de instabilidade do pórtico P1 e seus valores limite, obtendo-se os resultados mostrados na Tabela 5-25.

Tabela 5-25 - Valor dos parâmetros de instabilidade do pórtico P1 e valores limite

	Calculado	Limite	Mobilidade dos nós
α	0,27	0,3	Nós fixos
γ_z	1,01	1,1	Nós fixos

Como o valor de α está abaixo do valor limite estabelecido pela NBR-6118/2007, o pórtico é caracterizado como de nós fixos, logo pouco suscetível aos efeitos de segunda ordem. O coeficiente γ_z também indica o pórtico como de nós fixos. É esperado que essa classificação reflita nos resultados das análises não lineares efetuadas a seguir.

O resultado das análises em termos de curva carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo está mostrado na Figura 5-22 e alguns detalhes dos resultados estão mostrados na Tabela 5-26. A curva da Figura 5-22 para o modelo NLGF, que é o modelo de referência, foi apresentada até a carga última do modelo, para se identificar todos os eventos de não linearidade física que ocorrem (fissuração – F; escoamento Y; pico de compressão - C) e para os demais modelos mostrou-se a curva apenas até a carga de projeto. Ressalta-se que está se denominando carga última ao valor obtido na última etapa em que se obteve equilíbrio de cada pórtico, imediatamente anterior à etapa correspondente à aplicação de incremento de carga em que ocorreu a ruptura de material ou instabilidade do pórtico.

Figura 5-22 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P1

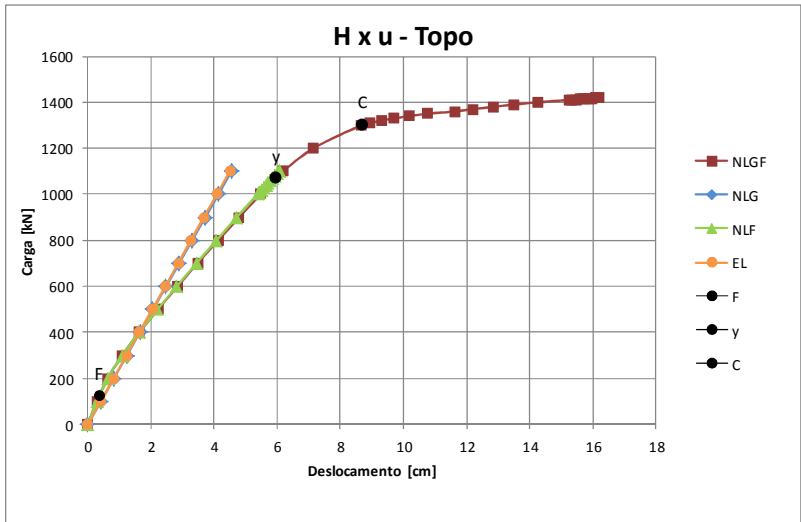


Tabela 5-26 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P1

Modelo	EL	NLG	NLF	NLGF
Carga de projeto [kN] (lateral)	1100	1100	1100	1100
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,498	4,554	6,068	6,198
Diferença relativa do deslocamento [%]	27,43	26,53	2,09	-
Primeira fissura [kN]	-	-	125	125
Escoamento aço [kN]	-	-	1080	1070
Pico de compressão [kN]	-	-	(1310)	(1300)
Ruptura do aço [kN]	-	-	-	-

Ao observar inicialmente as curvas dos modelos EL e NLG, nota-se que o efeito da não linearidade geométrica não é expressivo, a variação entre os deslocamentos de topo fica em torno de 1,24%. Este resultado era esperado, pois o parâmetro de instabilidade indicou estrutura de nós fixos.

É possível notar na Figura 5-22 que as curvas dos modelos EL e NLG ficaram praticamente sobrepostas ao longo do carregamento, assim como as curvas dos modelos NLF e NLGF. Isso reforça que a influência da não linearidade geométrica é pequena.

Interessante comentar que, inicialmente, os modelos NLF e NLGF apresentaram rigidez inicial superior aos modelos EL e NLG por conta da presença da armadura, mas devido à não linearidade física perderam rigidez progressivamente.

Nas análises que levaram em conta a não linearidade física, NLF e NLGF, o comportamento do pórtico é mais flexível do que o obtido das análises que não a consideraram, apresentando perda de rigidez e deslocamentos maiores a partir do nível de carga correspondente ao início da fissuração.

A diferença entre estas duas últimas análises foi pequena, conforme esperado, tendo em vista que o pórtico foi classificado como de nós fixos, sendo bem pequeno o efeito da não linearidade geométrica. A diferença entre o deslocamento lateral no topo entre os dois modelos foi de apenas 2,09%.

Outra observação interessante são os valores de controle nos modelos NLF e NLGF. Os valores de carga onde ocorre o primeiro registro de escoamento do aço e pico de compressão no concreto foram inferiores no modelo NLGF, mostrando que apesar de a não linearidade geométrica não ter muita influência na análise deste pórtico, ela alterou alguns valores de controle.

Observa-se no modelo NLGF que a partir da carga em torno de 1300 kN, onde as primeiras camadas das seções atingiram o pico de compressão e o escoamento do aço já havia ocorrido, há uma grande perda de rigidez no modelo para pequeno incremento de carga.

É possível concluir que, para o pórtico P1, nas condições de carga e geometria descritas anteriormente, o efeito da não linearidade física é predominante no comportamento da estrutura.

5.4.2. P2

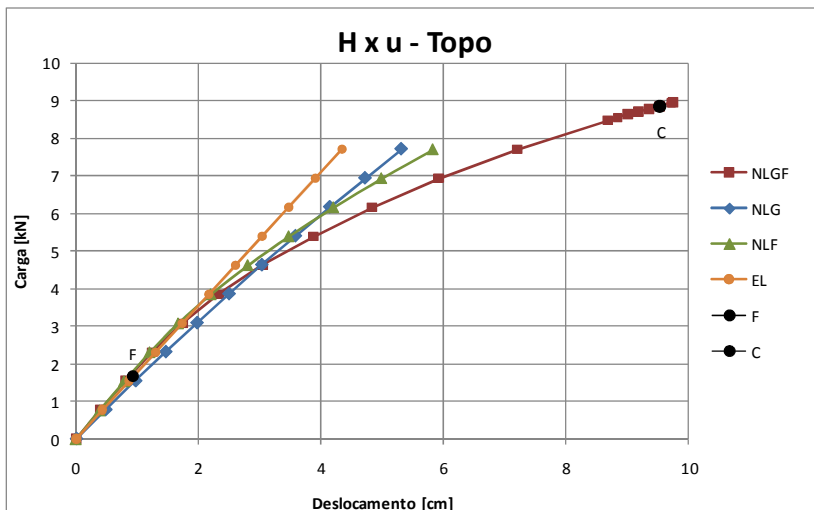
Os resultados dos parâmetros de instabilidade α e coeficiente γ_z para o pórtico P2 estão mostrados na Tabela 5-27. Trata-se de uma estrutura de nós móveis e, portanto, sensível aos efeitos de segunda ordem.

Tabela 5-27 - Valores dos parâmetros de instabilidade do pórtico P2 e valores limite

	Calculado	Limite	Mobilidade dos nós
α	0,71	0,5	Nós móveis
γ_z	1,15	1,1	Nós móveis

Os resultados das quatro análises efetuadas para o pórtico P2 encontram-se na Figura 5-23 e na Tabela 5-28. Na curva da Figura 5-23 correspondente ao modelo NLGF, que é o modelo de referência, foram identificados os eventos de não linearidade física até a carga última, enquanto as curvas dos demais modelos foram truncadas após a carga de projeto.

Figura 5-23 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P2



Os resultados mostram que para este pórtico P2 o efeito da não linearidade geométrica é significativo, mas a influência da não linearidade física é maior, o que está consistente, tendo em vista que o pórtico tem apenas quatro andares.

A consideração apenas da não linearidade geométrica, NLG, gerou uma diferença de 22,34% no deslocamento lateral do topo em relação ao modelo EL. Já quando combinada com a não linearidade física (análise NLGF), a não linearidade geométrica gerou uma diferença de 19,13% a mais no deslocamento do topo em relação à análise NLF.

Observa-se da Figura 5-23 que os modelos que consideram a não linearidade física, NLF e NLGF, começam a perder rigidez em torno de 3kN, após o início da fissuração. Comparando-se a curva carga *versus* deslocamento da análise NLF com a da NLGF, nota-se que a inclusão da não linearidade geométrica resulta em um modelo mais flexível, conforme esperado para este pórtico com $\alpha = 0,71$.

Estes dois modelos apresentaram a primeira fissura ao mesmo nível de carga lateral, 1,83 kN. O modelo de referência, NLGF, foi o único a apresentar pico de compressão, sendo a uma carga acima daquela de projeto (valor apresentado entre parênteses na Tabela 5-28).

Tabela 5-28 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P2

Modelo	EL	NLG	NLF	NLGF
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,7	7,7	7,7	7,7
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,342	5,312	5,826	7,204
Diferença relativa do deslocamento [%]	47,75	31,01	19,13	-
Primeira fissura [kN]	-	-	1,83	1,83
Escoamento aço [kN]	-	-	-	-
Pico de compressão [kN]	-	-	-	(8,855)
Ruptura do aço [kN]	-	-	-	-

A deformada do pórtico, Figura 5-24, mostra a diferença que a associação das duas não linearidades provocou na resposta do pórtico. O modelo NLGF foi o mais flexível ao longo do toda a altura do pórtico, principalmente no primeiro andar, onde os deslocamentos foram maiores do que os obtidos pelos outros três modelos.

A curva do modelo NLG apresentou deslocamentos laterais um pouco maiores em relação aos do modelo EL, havendo uma diferença crescente entre as duas curvas ao longo da altura do pórtico. Os deslocamentos do modelo NLG e NLF apresentaram valores próximos no primeiro e segundo andar, sendo que apenas a partir do terceiro pavimento o modelo NLF apresentou comportamento mais flexível.

Já comparando-se as curvas da deformada obtida dos modelos em que se considera a não linearidade física, NLF e NLGF, observa-se uma diferença maior entre as duas curvas, sendo maiores os deslocamentos laterais do modelo NLGF que considera ambas não linearidades, mas a diferença também é aproximadamente constante ao longo da altura do pórtico. Isso comprova que a não linearidade geométrica contribui expressivamente para o deslocamento final quando associada à não linearidade física em estruturas esbeltas.

Apresentam-se na Tabela 5-29 os valores de deslocamento lateral de cada andar para a carga de projeto, obtidos de cada modelo analisado. Mostra-se também nesta tabela a contribuição de cada andar para o deslocamento de topo do pórtico, sendo calculado pelo incremento de deslocamento de determinado andar em relação ao andar inferior, e

avaliando o quanto esse incremento representa no valor total. Essa comparação ajuda a entender o quanto cada pavimento é responsável pelo deslocamento final no topo, variável que é utilizada nas comparações entre modelos nos gráficos carga *versus* deslocamento apresentados ao longo dessa dissertação.

Nesta comparação é interessante lembrar que o primeiro andar do pórtico tem um pé direito um metro maior do que os dos andares superiores.

Observa-se da Figura 5-25 que há um padrão no comportamento do pórtico, no qual o primeiro andar contribuiu de forma mais significativa para o deslocamento final em todos os modelos, enquanto a cobertura tem a menor participação. Comparando-se a curva do modelo EL com a do NLG e a do modelo NLF com a do NLGF, nota-se que, com a inclusão da não linearidade geométrica, aumenta a contribuição do terceiro andar no deslocamento do topo, já que este apresenta considerável diferença em relação ao segundo pavimento.

Figura 5-24 - Deformada - Influência das NL's - P2

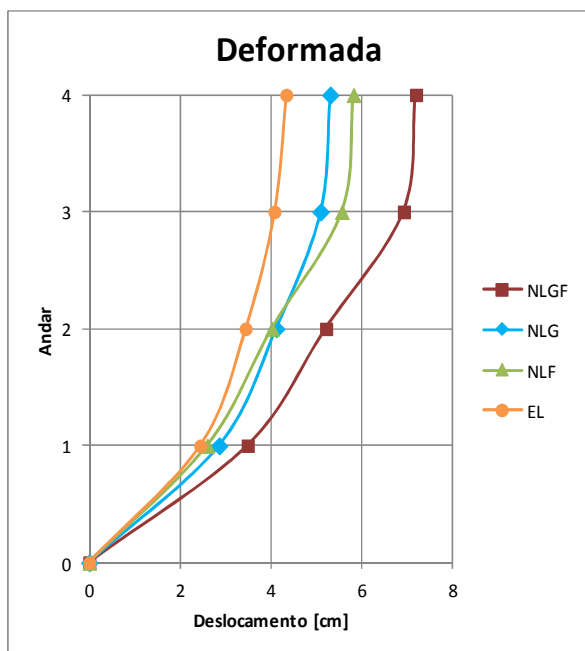
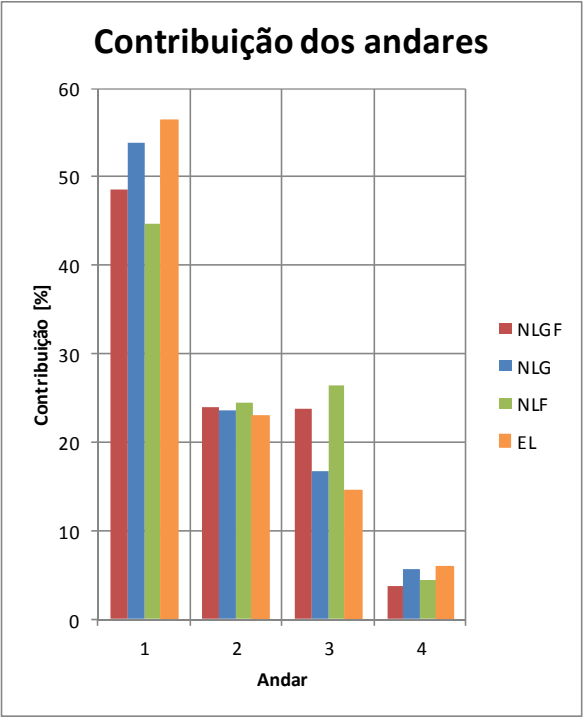


Tabela 5-29 - Dados das deformadas - Influência das NL's - P2

Andar	NLGF		NLF	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
4	7,204	3,748	5,826	4,446
3	6,934	23,806	5,567	26,416
2	5,219	23,931	4,028	24,494
1	3,495	48,515	2,601	44,645
Andar	NLG		EL	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
4	5,312	5,685	4,342	6,011
3	5,010	16,755	4,081	14,648
2	4,120	23,682	3,445	22,985
1	2,862	53,878	2,447	56,357

Figura 5-25 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P2



5.4.3. P3

Os resultados dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P3 estão mostrados na Tabela 5-30. O parâmetro de instabilidade α indica que o pórtico P3 está logo acima do limite, apresentando, portanto, comportamento de nós móveis. Já o cálculo do coeficiente γ_z resulta em um valor abaixo do limite do coeficiente (1,1), o que permite classificá-lo como de nós fixos. Vale ressaltar que, apesar de classificado como de nós móveis apenas pelo parâmetro α , seu valor ultrapassou pouco o limite. Assim espera-se que a influência dos efeitos de segunda ordem não seja tão expressiva.

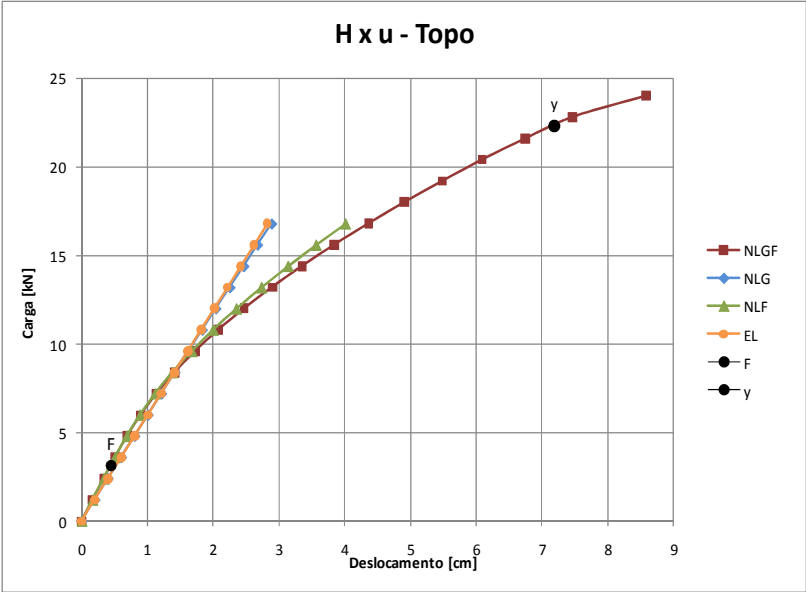
Tabela 5-30 - Valores dos parâmetros de instabilidade do pórtico P3 e valores limite

	Calculado	Limite	Mobilidade dos nós
α	0,51	0,5	Nós móveis
γ_z	1,05	1,1	Nós fixos

Os quatro modelos estudados têm seus resultados apresentados em termos de curvas carga lateral no topo *versus* deslocamento lateral no topo, na Figura 5-35 e valores numéricos na Tabela 5-31.

A curva da figura 5-26 para o modelo NLGF, que é o modelo de referência, foi apresentada até a carga última do modelo, para serem identificados todos os eventos de não linearidade física que ocorreram (fissuração – F; escoamento Y); já para os demais modelos mostrou-se a curva apenas até a carga de projeto (16,8 kN).

Figura 5-26 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P3



Uma análise inicial das curvas carga *versus* deslocamento dos modelos EL e NLG mostra que o efeito da não linearidade geométrica é pouco expressivo, o que era de se esperar tendo em vista o valor de α em comparação ao valor limite. No modelo NLG obteve-se um aumento de

2,55% no deslocamento lateral do topo, correspondente à carga de projeto, em comparação ao modelo EL.

Tabela 5-31 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P3

Modelo	EL	NLG	NLF	NLGF
Carga de projeto [kN] (lateral)	16,8	16,8	16,8	16,8
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	2,821	2,893	4,022	4,366
Diferença relativa do deslocamento [%]	36,39	33,74	7,88	-
Primeira fissura [kN]	-	-	3,12	3,12
Escoamento aço [kN]	-	-	-	(22,32)
Pico de compressão [kN]	-	-	-	-
Ruptura do aço [kN]	-	-	-	-

Essa relação se torna diferente ao se observar a curva dos modelos NLF e NLGF, em que a diferença de deslocamento lateral no topo, para a carga de projeto, é de 7,88%, mostrando que a não linearidade geométrica influi mais nos valores de deslocamento lateral quando combinada com a não linearidade física.

Observa-se também da Figura 5-35 que a curva do modelo NLF está bem próxima da curva do modelo NLGF, mostrando que a não linearidade física teve uma grande influência no comportamento estrutural deste pórtico. Ressalta-se que os modelos que consideram a não linearidade física mostraram-se um pouco mais rígidos no início do carregamento do que os modelos sem essa não linearidade, tendo em vista a presença das armaduras. À medida que efeitos da não linearidade física surgem no pórtico, a perda de rigidez é gradativa e provoca um deslocamento lateral final superior.

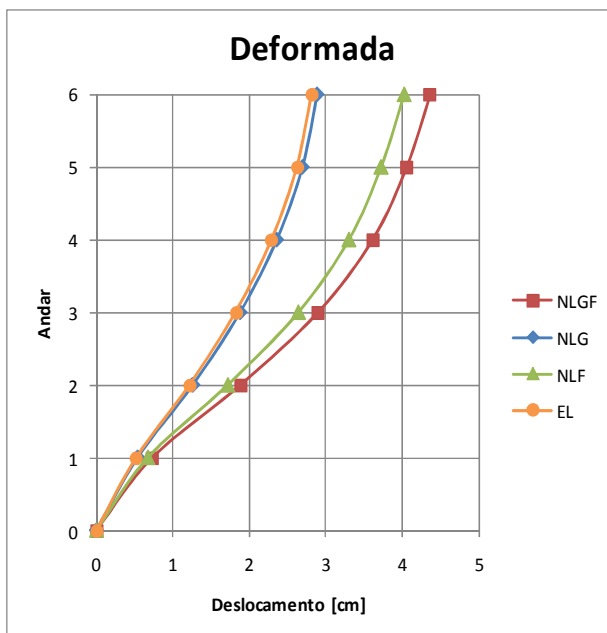
Vale ressaltar que dentro do limite da carga de projeto, os modelos NLF e NLGF apresentaram apenas fissuração, com início no mesmo nível de carga e no mesmo ponto: extrema direita da viga do primeiro andar. Acima desta carga apenas no modelo NLGF houve escoamento do aço da armadura do pórtico.

Interessante comentar que os modelos NLF e NLGF, que consideram a não linearidade física no cálculo, apresentaram carga última acima da carga de projeto. Apesar de não estar mostrado na Figura 5-27 (curva mostrada apenas até a carga de projeto), não foi possível prosseguir a análise do modelo NLF após a carga de 26,31 kN, provavelmente devido ao início de escoamento do aço. Já o modelo NLGF atingiu 25,68 kN de carga última, apresentando, além de

fissuração o escoamento do aço das armaduras, sob o valor de carga entre parênteses na Tabela 5-57.

Conforme já observado da Figura 5-26, na deformada do pórtico, Figura 5-27, também se nota que o efeito da não linearidade geométrica é muito pequeno no pórtico P3, sendo mais observado ao se comparar a curva do modelo NLGF com a do modelo NLF. Já a influência da NLF foi bem significativa neste pórtico, conforme já mencionado, podendo-se observar que as deformadas dos modelos NLF e NLGF apresentaram maiores deslocamentos. Nota-se também que o efeito das duas não linearidades foi mais pronunciado nos andares superiores.

Figura 5-27 - Deformada - Influência das NL's - P3



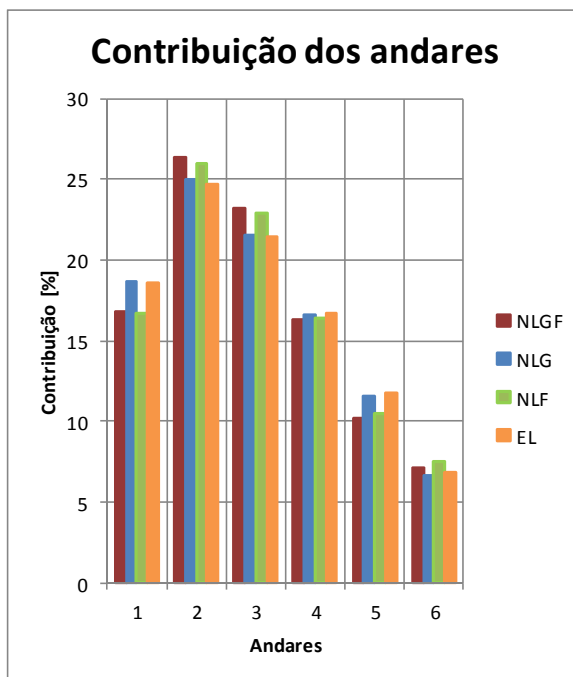
Apresenta-se em seguida, na Tabela 5-32, o deslocamento de cada pavimento e também a porcentagem de contribuição do incremento de deslocamento de cada andar para o deslocamento final no topo. A Figura 5-28 mostra essa contribuição de forma gráfica. Observa-se que as barras de contribuição de andares de cada modelo estão bem próximas, sendo que as do modelo NLG coincidem praticamente com as do modelo EL e o mesmo ocorre para os modelos NLF e NLGF.

Independentemente do modelo analisado, os deslocamentos do segundo pavimento em relação ao primeiro são os que apresentam maior contribuição para o deslocamento do topo, em torno de um quarto para todos os modelos. A segunda maior contribuição vem do terceiro pavimento, com cerca de 22% de responsabilidade pelo deslocamento no topo. A cada pavimento subsequente a contribuição diminui até atingir um mínimo do andar de cobertura.

Tabela 5-32 - Resultados de deslocamentos ao longo dos andares - Influência das NL's - P3

Andar	NLGF		NLG	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
6	4,366	7,100	2,893	6,637
5	4,056	10,169	2,701	11,614
4	3,612	16,331	2,365	16,592
3	2,899	23,248	1,885	21,500
2	1,884	26,386	1,263	24,991
1	0,732	16,766	0,54	18,666
Andar	NLF		EL	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
6	4,022	7,509	2,821	6,806
5	3,72	10,443	2,629	11,769
4	3,3	16,410	2,297	16,732
3	2,64	22,949	1,825	21,446
2	1,717	25,957	1,22	24,708
1	0,673	16,733	0,523	18,540

Figura 5-28 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P3



5.4.4. P4

Os resultados dos parâmetros de instabilidade α e coeficiente γ_z para o pórtico P4 estão mostrados na Tabela 5-33. O cálculo do parâmetro α mostra que o pórtico P4 tem nós móveis, com uma certa diferença em relação ao valor limite, logo espera-se que a influência dos efeitos de segunda ordem seja importante. Por outro lado, o cálculo do coeficiente γ_z mostra que o pórtico pode ser classificado como de nós fixos. Nota-se, apesar disso, que o valor calculado é elevado, sendo próximo ao valor limite, logo pode vir a ser importante o efeito de segunda ordem no comportamento da estrutura, tendo em vista as aproximações feitas no cálculo deste coeficiente.

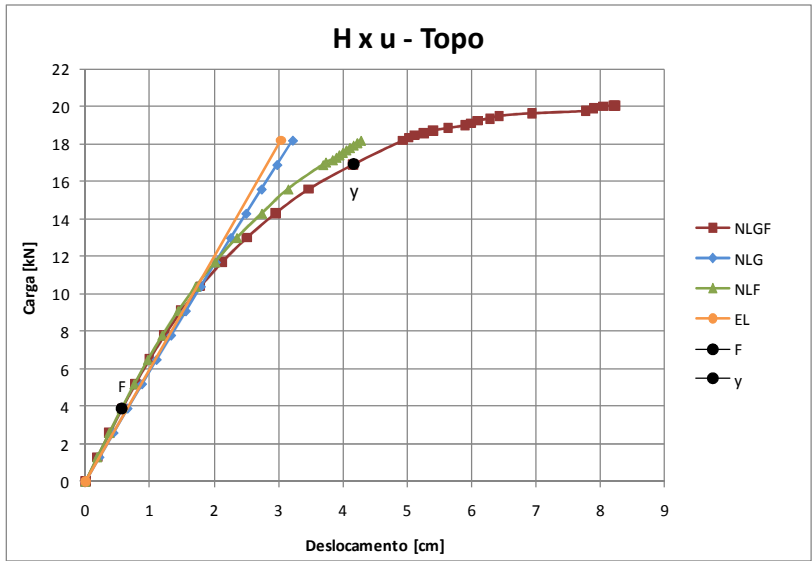
Tabela 5-33 - Valores dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P4 e valores limite

	Calculado	Limite	Mobilidade dos nós
α	0,64	0,5	Nós móveis
γ_z	1,09	1,1	Nós fixos

Os resultados de deslocamento lateral no topo e valores de carga correspondentes a cada evento de não linearidade física de cada modelo podem ser vistos na Tabela 5-34, e as curvas carga *versus* deslocamento, mostrando o comportamento ao longo do histórico de carga, podem ser vistas na Figura 5-29.

A curva carga *versus* deslocamento lateral no topo obtida pelo modelo NLGF, modelo de referência, foi apresentada até a carga última obtida pelo modelo, mostrando-se os pontos de início dos eventos de não linearidade física (F - fissuração e Y – escoamento do aço). As curvas obtidas pelos demais modelos são mostradas apenas até a carga de projeto (igual a 18,2kN).

Figura 5-29 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P4



Do gráfico carga *versus* deslocamento lateral no topo dos modelos EL e NLG, observa-se que para este pórtico a não linearidade

geométrica contribuiu para gerar uma diferença de 6,09% entre os deslocamentos laterais no topo do pórtico.

Tabela 5-34 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P4

Modelo	EL	NLG	NLF	NLGF
Carga de projeto [kN] (lateral)	18,2	18,2	18,2	18,2
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	3,035	3,232	4,293	4,942
Diferença relativa do deslocamento [%]	38,59	34,6	13,13	-
Primeira fissura [kN]	-	-	3,9	3,9
Escoamento aço [kN]	-	-	16,9	16,9
Pico de compressão [kN]	-	-	(21,33)	-
Ruptura do aço [kN]	-	-	(21,19)	-

Por outro lado, entre os modelos NLF e NLGF, a diferença entre os deslocamentos no topo foi de 13,13%. Isso mostra que quando a não linearidade geométrica está combinada com a não linearidade física seu efeito sobre os deslocamentos no pórtico aumenta consideravelmente.

Todos os modelos apresentam rigidez semelhante do início do carregamento até a carga de aproximadamente 10 kN. Nesse ponto as curvas que consideram a não linearidade física começam a perder rigidez gradativamente. Como o escoamento do aço ocorreu apenas sob a carga de 16,9 kN, a perda de rigidez dos modelos até essa etapa é devido à fissuração. Acima dessa carga, o escoamento do aço das armaduras contribuiu também para a perda de rigidez.

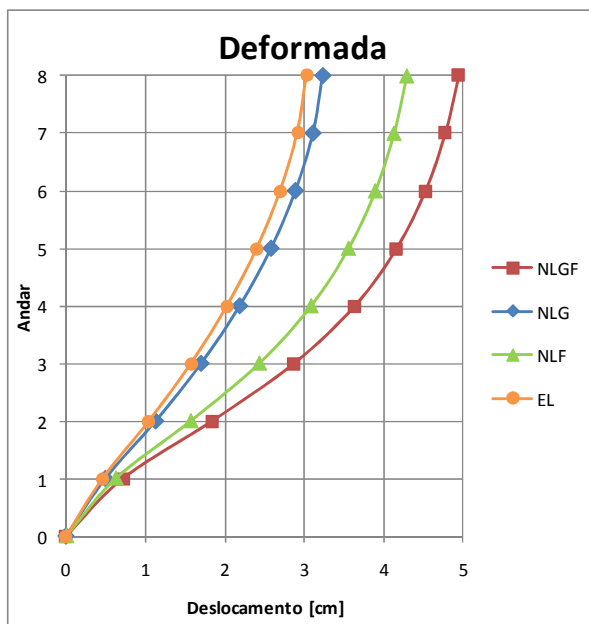
Apesar de não estar mostrado na Figura 5-29, o modelo NLF atingiu a carga última de 21,37 kN, enquanto que, no modelo NLGF, a carga última obtida na análise foi de 20,03 kN.

Interessante observar que, antes da carga última, o modelo NLGF apresentou apenas fissuras e escoamento do aço, enquanto que o modelo NLF apresentou também pontos de ruptura do aço e pico de compressão do concreto, a 21,19 kN e 21,33 kN, respectivamente. Provavelmente na etapa seguinte à carga última, não houve convergência do processo iterativo na análise do modelo NLGF devido à ocorrência do pico de compressão.

A deformada do pórtico obtida pelos diversos modelos está mostrada na Figura 5-30. Observa-se novamente que o efeito da não linearidade geométrica é mais acentuado quando combinado com o efeito da não linearidade física. Comparando-se a deformada do modelo NLF com a do modelo NLGF nota-se que até o primeiro andar as curvas

praticamente coincidem e se afastam a partir deste andar, sendo que a partir do quarto pavimento a diferença entre as curvas é aproximadamente constante.

Figura 5-30 - Deformada - Influência das NL's - P4



Na Tabela 5-35 são mostrados os resultados de deslocamento lateral para cada pavimento de cada modelo, e a porcentagem de contribuição de cada andar para o deslocamento final do topo. Observa-se que a curva do modelo EL praticamente coincide com a do modelo NLG e o mesmo ocorre entre as curvas do modelo NLF e NLGF.

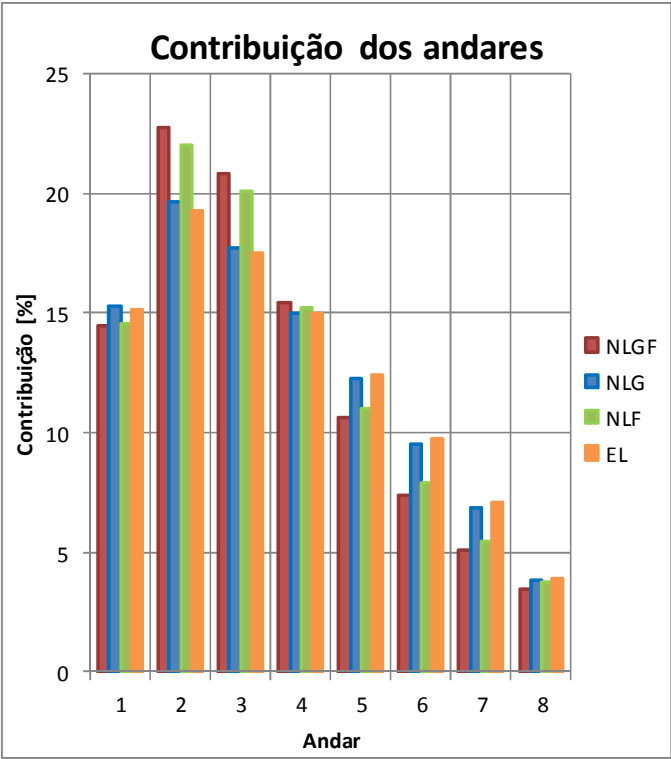
Em todos os modelos o segundo pavimento é o que mais contribui para o deslocamento no topo, já que em relação ao primeiro apresenta maior deslocamento relativo. O terceiro pavimento, em todos os modelos, apresenta a segunda maior contribuição ao deslocamento de topo e, o último pavimento, a menor.

Essa contribuição dos andares é ilustrada graficamente na Figura 5-31. Novamente observa-se que as barras dos modelos EL e NLG basicamente coincidem e as dos modelos NLF e NLGF são muito próximas.

Tabela 5-35 - Resultados de deslocamento ao longo dos andares -
Influência das NL's - P4

Andar	NLGF		NLG	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
8	4,942	3,4	3,232	3,806
7	4,772	5,1	3,109	6,838
6	4,522	7,3	2,888	9,499
5	4,159	10,6	2,581	12,252
4	3,633	15,5	2,185	15,006
3	2,869	20,8	1,700	17,698
2	1,839	22,7	1,128	19,616
1	0,715	14,5	0,494	15,285
Andar	NLF		EL	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
8	4,293	3,774	3,035	3,921
7	4,131	5,474	2,916	7,051
6	3,896	7,873	2,702	9,720
5	3,558	10,995	2,407	12,389
4	3,086	15,211	2,031	14,992
3	2,433	20,126	1,576	17,496
2	1,569	21,989	1,045	19,275
1	0,625	14,559	0,46	15,157

Figura 5-31 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P4



5.4.5. P5

O parâmetro de instabilidade α calculado para o pórtico P5 encontra-se acima do limite (ver Tabela 5-36), logo o pórtico é classificado como de nós móveis. Sendo assim, espera-se que os efeitos de segunda ordem tenham uma importância considerável na análise da estrutura. O coeficiente γ_z indicou um comportamento de nós fixos do pórtico (ver Tabela 5-36), porém, com um valor próximo ao limite de classificação de nós móveis, logo os efeitos de segunda ordem do pórtico podem vir a ser importantes, levando-se em conta as aproximações no cálculo deste coeficiente.

Tabela 5-36 - Valores dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P5 e valores limite

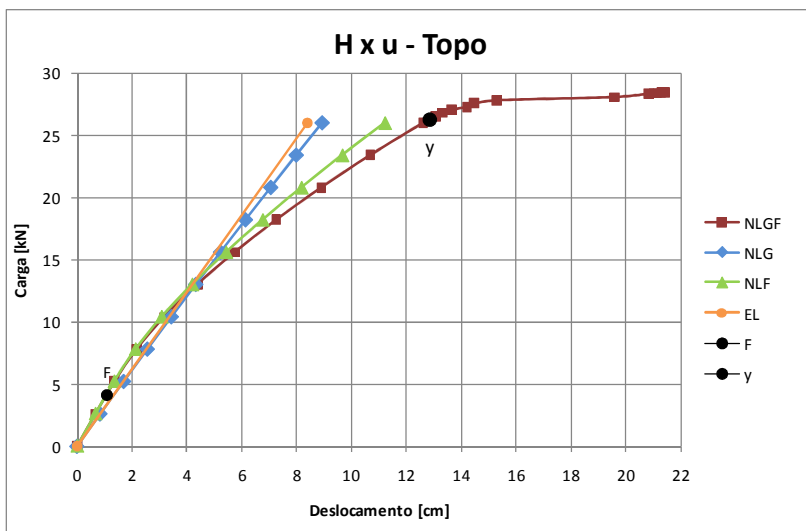
	Calculado	Limite	Mobilidade dos nós
α	0,71	0,5	Nós móveis
γ_z	1,09	1,1	Nós fixos

Os resultados em termos de curvas carga lateral aplicada no topo *versus* deslocamento lateral no topo, com ocorrências de não linearidade física para o modelo de referência, são apresentados na Figura 5-32 (sendo as curvas dos demais modelos mostradas apenas até a carga de projeto de 26 kN), e os resultados numéricos na Tabela 5-37.

Tabela 5-37 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P5

Modelo	EL	NLG	NLF	NLGF
Carga de projeto [kN] (lateral)	26	26	26	26
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	8,39	8,926	11,208	12,614
Diferença relativa do deslocamento [%]	33,48	29,24	11,14	-
Primeira fissura [kN]	-	-	4,16	4,16
Escoamento aço [kN]	-	-	(28,86)	(26,26)
Pico de compressão [kN]	-	-	-	-
Ruptura do aço [kN]	-	-	-	-

Figura 5-32 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P5



Os modelos podem ser separados naqueles que não consideraram a não linearidade física, EL e NLG, e aqueles que a consideraram, NLF e NLGF.

Com relação aos modelos EL e NLG, a consideração da não linearidade geométrica provocou uma diferença de 6,0% no deslocamento final do topo em relação à linha reta do modelo elástico linear, gerando perda de rigidez ao longo do carregamento.

Entre os modelos NLF e NLGF, nota-se que, apesar da primeira fissura ocorrer perto de 4 kN de carga lateral, as curvas dos modelos seguem praticamente coincidentes até a carga de 15 kN. A partir desta, o modelo NLGF perde rigidez de forma mais expressiva, afastando-se do modelo NLF, e gerando uma diferença entre os modelos de 11,14%, provando assim que o efeito da não linearidade geométrica é maior quando combinado com a não linearidade física. Interessante comentar que estes modelos que consideram a não linearidade física no cálculo apresentaram carga última acima da carga de projeto. Apesar de não estar mostrado na Figura 5-32 (curva mostrada apenas até a carga de projeto), o modelo NLF atingiu carga última de 31,12 kN, enquanto o modelo NLGF atingiu 28,44 kN (ver Figura 5-32). Em ambos modelos ocorreu, além de fissuração, o escoamento do aço das armaduras, sob o valor de carga entre parênteses na Tabela 5-37. Nota-se desta tabela que o valor de carga correspondente à primeira fissura foi igual para os

modelos NLF e NLGF. Já o valor de carga correspondente ao início de escoamento do aço no modelo NLGF é inferior à obtida pelo modelo NLF, mostrando a influência da não linearidade geométrica.

Observa-se também, da Figura 5-32, que a curva do modelo NLF está relativamente próxima à curva do modelo de referência, NLGF, em comparação com as curvas dos outros modelos, mostrando que a não linearidade física teve maior influência no comportamento deste pórtico.

A deformada dos modelos é apresentada na Figura 5-33, e valores numéricos dos deslocamentos laterais obtidos ao longo da altura do pórtico, na Tabela 5-38. É possível notar que as deformadas dos modelos EL e NLG praticamente coincidem até o segundo andar e a partir deste andar se afastam ligeiramente, sendo que a diferença entre as curvas aumenta um pouco ao longo da altura, mas permanece constante nos andares superiores. O mesmo comportamento é observado ao se comparar as deformadas dos modelos NLF e NLGF, que são quase coincidentes até o terceiro andar, aumentando gradualmente a diferença até o sétimo andar e após mantendo constante. Nota-se uma maior diferença entre essas deformadas, mostrando que o efeito da não linearidade geométrica é maior quando combinado com o efeito da não linearidade física conforme já observado anteriormente.

Os resultados da Tabela 5-38 e da Figura 5-34 mostram que os andares que mais contribuíram para o deslocamento no topo foram os situados entre o segundo e sétimo andar.

Figura 5-33 - Deformada - Influência das NL's P5

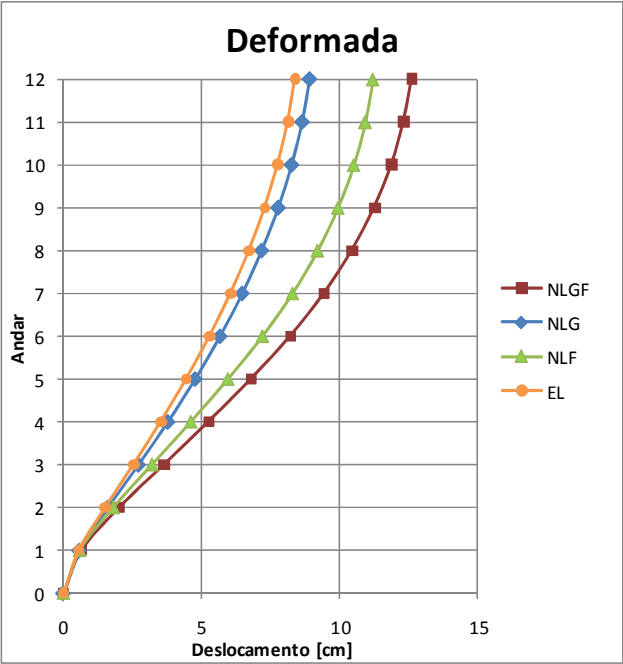
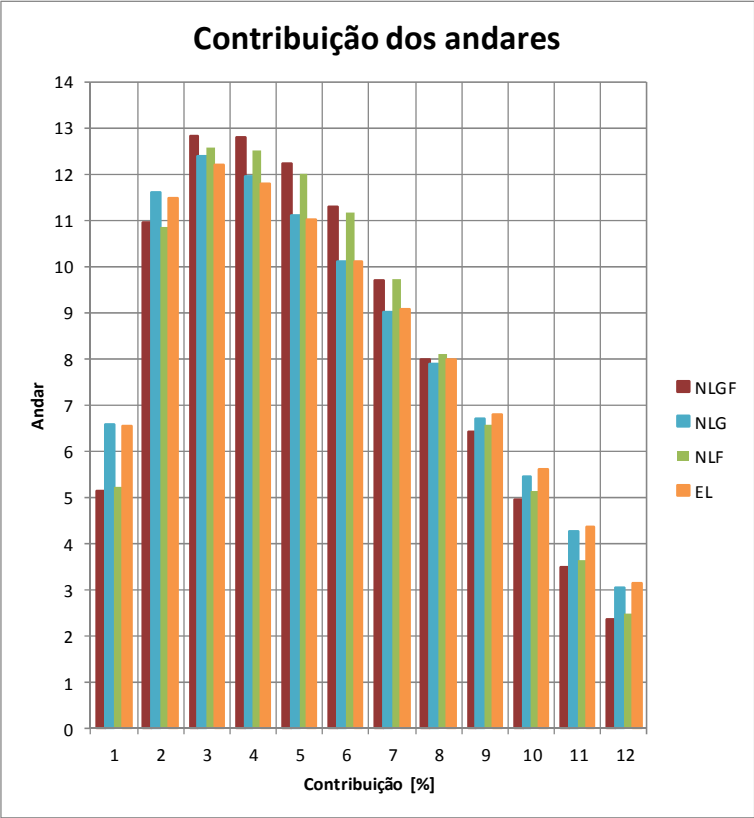


Tabela 5-38 - Resultados de deslocamentos ao longo dos andares -
Influência das NL's - P5

Andar	NLGF		NLF	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
12	12,614	2,355	11,208	2,489
11	12,317	3,464	10,929	3,640
10	11,88	4,955	10,521	5,139
9	11,255	6,406	9,945	6,585
8	10,447	7,967	9,207	8,092
7	9,442	9,696	8,300	9,716
6	8,219	11,273	7,211	11,171
5	6,797	12,232	5,959	12,018
4	5,254	12,772	4,612	12,500
3	3,643	12,819	3,211	12,571
2	2,026	10,932	1,802	10,858
1	0,647	5,129	0,585	5,219
Andar	NLG		EL	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
12	8,926	3,047	8,390	3,123
11	8,654	4,257	8,128	4,362
10	8,274	5,456	7,762	5,590
9	7,787	6,688	7,293	6,794
8	7,190	7,876	6,723	7,974
7	6,487	9,019	6,054	9,070
6	5,682	10,094	5,293	10,095
5	4,781	11,091	4,446	11,013
4	3,791	11,931	3,522	11,776
3	2,726	12,380	2,534	12,193
2	1,621	11,607	1,511	11,466
1	0,585	6,554	0,549	6,544

Figura 5-34 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P5



5.4.6. P6

Os resultados dos parâmetros de instabilidade α e coeficiente γ_z para o pórtico P6 estão mostrados na Tabela 5-39. O parâmetro α ultrapassou o limite determinado de 0,5, mostrando que este pórtico é suscetível aos efeitos de segunda ordem. Deve-se comentar, porém, que o limite do parâmetro $\alpha=0,5$ foi adotado porque é esperado que seu comportamento seja predominantemente de pórtico. No entanto, devido às grandes dimensões dos pilares, principalmente do pilar central, o pórtico tem influência de pilares-parede, o que elevaria o limite de α para 0,6. Neste caso, o valor calculado para o parâmetro estaria mais próximo ao valor limite, mostrando uma menor importância dos efeitos de segunda ordem. Já o coeficiente γ_z indicou um comportamento de nós

fixos para o pórtico, com o valor calculado exatamente igual ao valor limite, ou seja, pode haver uma tendência de efeito de segunda ordem no comportamento do pórtico, tendo em vista as aproximações no cálculo deste coeficiente.

Tabela 5-39 - Valores dos parâmetros de instabilidade para o pórtico P6 e valores limite

	Calculado	Limite	Mobilidade dos nós
α	0,67	0,5	Nós móveis
γ_z	1,1	1,1	Nós fixos

Os resultados estão apresentados em termos de valores numéricos na Tabela 5-40 e de curvas carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo na Figura 5-35.

O modelo NLGF, considerado de referência, apresentou carga última acima da carga lateral de projeto (igual a 7,82kN) aplicada no topo, portanto o gráfico da Figura 5-36 apresenta a sua curva completa, indicando as ocorrências de não linearidade física. Já para os outros modelos mostrou-se nesta figura as curvas apenas até a carga de projeto (7,82kN).

Tabela 5-40 - Comparativo de resultados - Influência das NL's - P6

Modelo	EL	NLG	NLF	NLGF
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,82	7,82	7,82	7,82
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,182	4,483	5,833	7,004
Diferença relativa do deslocamento [%]	40,29	35,99	16,72	-
Primeira fissura [kN]	-	-	3,128	2,346
Escoamento aço [kN]	-	-	(10,95)	(9,384)
Pico de compressão [kN]	-	-	(12,51)	(11,10)
Ruptura do aço [kN]	-	-	-	-

Observa-se da Figura 5-35 que o modelo de referência (NLGF) foi o que apresentou o maior deslocamento no topo, seguido pelo modelo NLF, depois NLG e finalmente o modelo EL, o mais rígido de todos.

Nota-se também que até a carga de aproximadamente 5 kN os modelos EL, NLG e NLF apresentaram curvas próximas, e, acima desse valor, o modelo NLF perdeu rigidez e se afastou consideravelmente dos outros dois modelos. Por outro lado, o modelo NLGF mostrou a perda

de rigidez já a partir da carga de 4,5 kN, mostrando o comportamento mais flexível de todos em comparação com os outros três modelos, até a carga final.

Figura 5-35 - Carga X deslocamento - Influência das NL's - P6

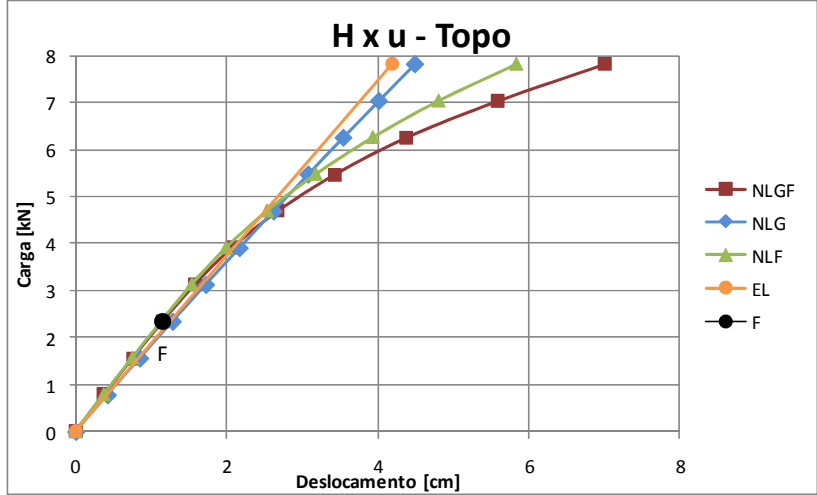
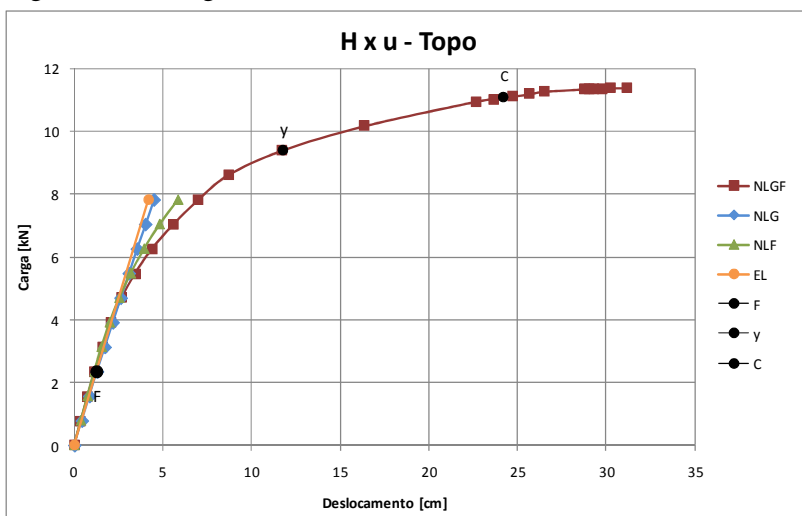


Figura 5-36 - Carga X deslocamento b - Influência das NL's - P6



É interessante comparar os quatro modelos em dois conjuntos, os dois modelos que não consideram a não linearidade física, e os dois modelos que a consideram.

- (i). O primeiro conjunto mostra que a não linearidade geométrica isolada apresentou um deslocamento lateral no topo 7,19% maior em relação ao modelo EL;
- (ii). O segundo conjunto, com a não linearidade física considerada, mostra que com a associação das duas não linearidades, a não linearidade geométrica contribuiu para um deslocamento lateral no topo 16,72% maior do que o obtido pelo modelo NLF.

Quanto aos valores de controle, eles podem ser avaliados para os modelos que consideram a não linearidade física.

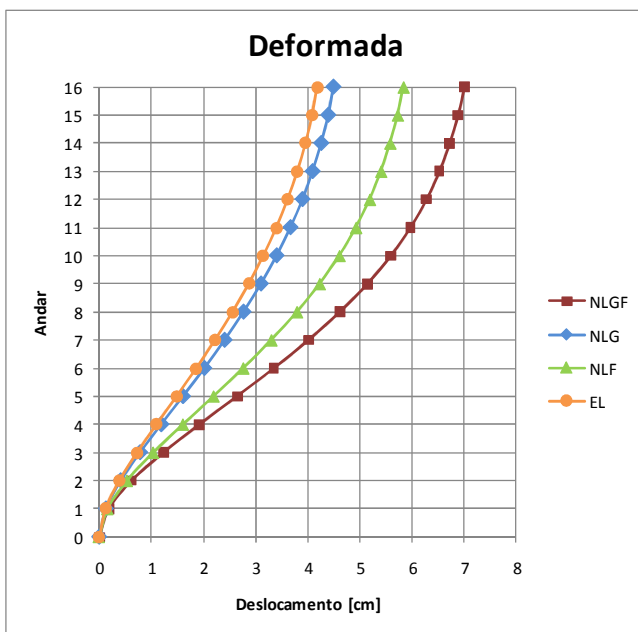
O modelo de referência (NLGF) apresentou a primeira fissura a um nível de carga inferior que o modelo NLF, porém no mesmo local, região de momento positivo da viga do vão esquerdo no quarto andar. O nível de início de escoamento do aço foi obtido acima da carga lateral de projeto (valores entre parênteses na Tabela 5-40), e novamente o modelo de referência apresentou início de escoamento antes que o modelo NLF (em ambos modelos na região de momento positivo da viga do vão esquerdo do terceiro andar). Finalmente, para o valor de pico de

compressão do concreto, o modelo NLGF registrou esse valor de controle novamente antes do modelo NLF, sendo que ambos apresentaram a ocorrência acima da carga de projeto (apresentado entre parênteses). Essa ocorrência se deu na base do pilar térreo central do pórtico. A ruptura do aço não foi atingida. O modelo NLF atingiu carga última de 13,06 kN (não mostrada na curva da Figura 5-35, pois foi truncada após a carga de projeto), enquanto que para o modelo NLGF o valor último foi de 11,38 kN (ver Figura 5-36).

Em resumo, a perda de rigidez dos modelos com a não linearidade física se deu principalmente por conta da evolução da fissuração e o modelo com as duas não linearidades combinadas (NLGF) é mais flexível, apresentando início de fissuração, de escoamento do aço e pico de compressão para cargas inferiores que o modelo NLF.

A deformada lateral dos pórticos obtida pelos diversos modelos está mostrada na Figura 5-37, e os valores dos deslocamentos ao longo dos andares encontram-se nas Tabelas 5-41 e 5-42.

Figura 5-37 - Deformada - Influência das NL's - P6



As deformadas do pórtico P6 indicam um comportamento combinado de pórtico e pilar-parede, por conta das dimensões dos

pilares, sendo que é possível confirmar esse fato observando os deslocamentos menores nos andares inferiores.

Observa-se da Figura 5-37 que as deformadas obtidas pelos modelos EL e NLG são muito próximas, sendo os deslocamentos laterais do modelo NLG ligeiramente maiores a partir do quinto andar. No entanto há uma influência bem mais significativa da não linearidade geométrica na deformada do modelo NLGF quando comparada com a deformada do modelo NLF. As curvas ficam próximas apenas até o segundo pavimento, mas acima deste se afastam, e novamente, assim como observado nos exemplos anteriores, a diferença entre as deformadas fica constante nos pavimentos superiores.

A Tabela 5-41 apresenta os deslocamentos para cada pavimento, obtidos pelos modelos NLGF e NLF e a Tabela 5-42 os obtidos pelos modelos NLG e EL, mostrando-se também a contribuição de cada um para o deslocamento final do topo. Os andares situados entre o terceiro e oitavo pavimento são os que mostraram uma contribuição maior para o deslocamento lateral do topo (cada andar contribuiu cerca de 8 a 10%). Entre o décimo e o último pavimento os modelos com a não linearidade física mostraram menor contribuição dos que os modelos EL e NLG.

A Figura 5-38 ilustra graficamente a contribuição dos andares para o deslocamento no topo. O mesmo comportamento é observado em relação aos exemplos anteriores do P3, P4 e P5. As barras que representam as contribuições dos modelos EL e NLG coincidem, assim como praticamente coincidem as barras que representam os modelos NLF e NLGF.

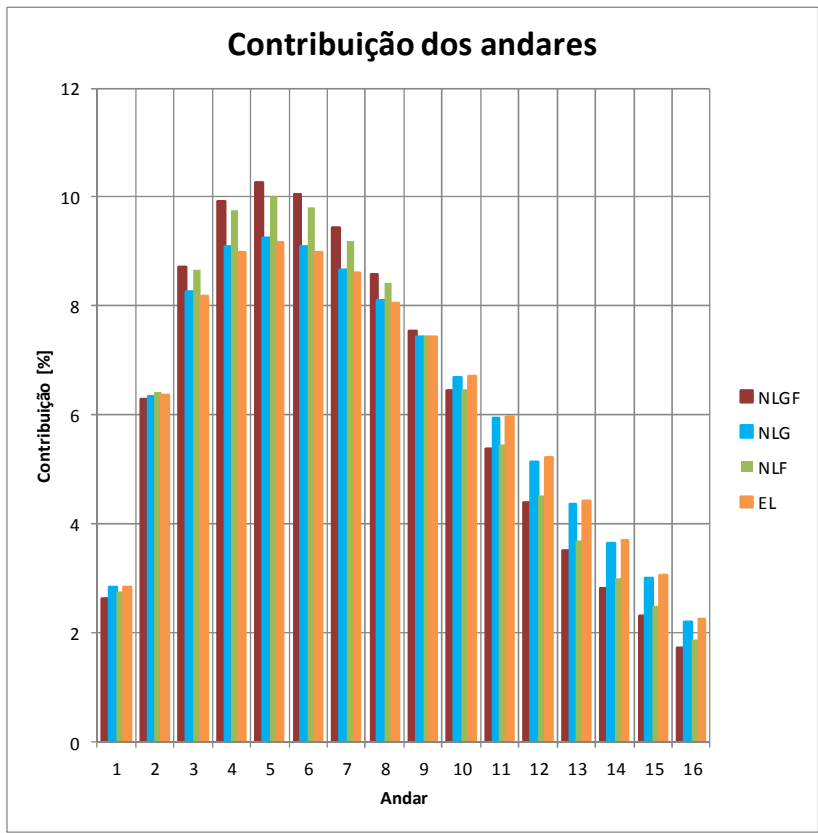
Tabela 5-41 - Resultados de deslocamentos ao longo dos andares -
Influência das NL's - P6

Andar	NLGF		NLF	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
16	7,004	1,728	5,833	1,869
15	6,883	2,299	5,724	2,486
14	6,722	2,813	5,579	3,000
13	6,525	3,512	5,404	3,703
12	6,279	4,383	5,188	4,526
11	5,972	5,383	4,924	5,452
10	5,595	6,453	4,606	6,463
9	5,143	7,553	4,229	7,458
8	4,614	8,581	3,794	8,418
7	4,013	9,437	3,303	9,206
6	3,352	10,066	2,766	9,806
5	2,647	10,266	2,194	10,029
4	1,928	9,909	1,609	9,755
3	1,234	8,709	1,04	8,658
2	0,624	6,282	0,535	6,412
1	0,184	2,627	0,161	2,760

Tabela 5-42 - Resultados de deslocamento ao longo dos andares -
Influência das NL's - P6

Andar	NLG		EL	
	u [cm]	Contribuição do andar [%]	u [cm]	Contribuição do andar [%]
16	4,483	2,208	4,182	2,248
15	4,384	3,011	4,088	3,061
14	4,249	3,636	3,96	3,706
13	4,086	4,350	3,805	4,424
12	3,891	5,130	3,62	5,213
11	3,661	5,934	3,402	5,978
10	3,395	6,692	3,152	6,719
9	3,095	7,428	2,871	7,437
8	2,762	8,097	2,56	8,058
7	2,399	8,655	2,223	8,608
6	2,011	9,101	1,863	8,991
5	1,603	9,257	1,487	9,182
4	1,188	9,079	1,103	8,991
3	0,781	8,253	0,727	8,178
2	0,411	6,335	0,385	6,361
1	0,127	2,833	0,119	2,846

Figura 5-38 - Contribuição dos andares - Influência das NL's - P6



5.4.7. Comentários das análises

Foram utilizados o parâmetro de instabilidade α e o coeficiente γ_z para uma avaliação preliminar da suscetibilidade dos pórticos aos efeitos de segunda ordem. É importante ressaltar que na NBR os efeitos de segunda ordem tratados em relação a estes parâmetros referem-se aos efeitos combinados de não linearidade geométrica e física. A questão discutida foi qual das duas tem maior influência em um pórtico de nós móveis.

O pórtico P1 apresentou valores dos parâmetros α e γ_z abaixo dos respectivos valores limites, logo classificado como de nós fixos. No

entanto a influência da não linearidade física foi importante, notando-se uma diferença considerável entre o deslocamento final no topo obtido com os modelos NLF e NLGF em relação ao modelo EL.

Já para os demais pórticos, ao se usar o parâmetro de instabilidade α , todos se classificam como estruturas de nós móveis, em que os efeitos de segunda ordem são importantes. Por outro lado, usando-se o coeficiente γ_z , o pórtico P2 fica classificado como de nós móveis, enquanto que os pórticos P4 a P6 ficam classificados como de nós fixos, sendo, porém, o valor do coeficiente muito próximo ao valor limite. Deve-se notar que os dois parâmetros de instabilidade são valores aproximados, sendo calculados de forma diferente, levando em consideração dados diferentes, e fornecem apenas uma estimativa para a necessidade ou não de se considerar os efeitos globais de segunda ordem.

É importante destacar que cada um dos modelos (EL; NLG; NLF; NLGF) apresentou um comportamento distinto ao longo da história de carregamento dos pórticos. Ainda que em uma análise real de uma estrutura as não linearidades devam ser consideradas juntas, foi interessante observar as diferenças entre considerá-las isoladamente e combinadas.

Em todos os pórticos estudados a não linearidade física foi a mais importante na análise. Considerando o modelo NLGF (com ambas não linearidades) como referência, o modelo que considerou apenas a NLF apresentou variações muito menores em relação ao modelo de referência do que aquele que admitiu apenas a NLG.

Comparando os modelos EL *versus* NLG e posteriormente NLF *versus* NLGF, nota-se que o efeito da não linearidade geométrica associada com material elástico linear sobre o deslocamento lateral do pórtico é inferior do que quando associada com material não linear. Isso mostra que quando a não linearidade geométrica está combinada com a não linearidade física seu efeito sobre os deslocamentos no pórtico aumenta consideravelmente, justificando a utilização de ambas em projeto. Uma estrutura fissurada se deforma mais e, conseqüentemente, maiores serão os efeitos de segunda ordem.

As deformadas mostram que nos pavimentos inferiores os modelos têm deslocamentos semelhantes, mas nos pavimentos superiores, os efeitos das não linearidades tornam-se mais expressivos e os modelos como NLF e NLGF atingem deslocamentos de topo maiores. As curvas das deformadas dos pórticos dos modelos que admitem a não linearidade física, modelos NLF e NLGF, ficaram

consideravelmente distantes das curvas dos modelos que não a admitem, modelos EL e NLG.

As deformadas EL e NLG seguem próximas ao longo da altura dos pórticos, com diferença aproximadamente constante. Já as deformadas dos modelos NLF e NLGF, além de apresentarem deslocamentos maiores que os outros modelos, as diferenças entre si são maiores e se tornam constantes a partir da metade da altura do pórtico, aproximadamente.

Com relação às contribuições de cada andar ao deslocamento lateral final no topo, observou-se uma maior contribuição dos pavimentos inferiores, principalmente do segundo e terceiro pavimento. É interessante ressaltar que as contribuições dos andares dos pórticos foram praticamente iguais entre os modelos EL e NLG e entre os modelos NLF e NLGF. Isso mostra que a inclusão da não linearidade geométrica não provoca alteração da rigidez relativa entre os andares, nem redistribuição de esforços, enquanto a consideração da não linearidade física gera esse efeito. O pórtico P2 apresentou um comportamento diferente dos demais, pois o primeiro pavimento apresenta altura diferente dos demais pavimentos.

A contribuição dos andares tende a diminuir ao longo da altura do pórtico, sendo que os últimos pavimentos, principalmente o de cobertura, têm as menores contribuições ao deslocamento final de topo.

O resumo da Tabela 5-43 mostra que cerca da metade inferior do pórtico contribui com porcentagens consideráveis do deslocamento final no topo. O pórtico P1 não está incluído nesta tabela, pois apresenta apenas um pavimento.

Tabela 5-43 - Relação entre contribuição dos andares e o deslocamento de topo

Pórtico	Andares com maiores contribuições	% em relação ao n° total de andares	% de contribuição do deslocamento final
P2	1	25	50
P3	1 - 4	66	> 80
P4	1 - 4	50	≈ 70
P5	2 - 7	50	≈ 70
P6	2 - 10	50	> 70

5.5. ESPRAIAMENTO DA NLF AO LONGO DOS PÓRTICOS

O modelo utilizado neste item para mostrar mapas de espraio da não linearidade física nos pórticos é o modelo NLGF do programa ANALEST, que considera tanto a não linearidade física como a geométrica nas análises. Os eventos assinalados nos mapas são: fissuração do concreto, escoamento do aço das armaduras, pico de compressão do concreto e ruptura do aço das armaduras.

Os elementos da malha de elementos finitos são separados por uma linha preta, e a divisão das lamelas e pontos de Gauss em cada elemento é feita por linhas cinza claro.

Cada elemento da malha está dividido em três partes, conforme o número de pontos de Gauss usado na avaliação das tensões (foram usados 3 pontos). Como cada um dos pontos de Gauss se encontra em posições definidas no elemento, o comprimento de influência de cada um foi determinado proporcionalmente à área de cada ponto calculada usando-se o respectivo peso do ponto de Gauss. Para uma área genérica igual a A, tem-se para 3 pontos de Gauss:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{9} A_1 + \frac{8}{9} A_2 + \frac{5}{9} A_3 \right) \quad (157)$$

Portanto, para um elemento de comprimento L e altura constante, utilizou-se uma região referente ao ponto de Gauss central do elemento com um comprimento igual a 8/18 de L, e, para as regiões referentes aos pontos de Gauss da extremidade, 5/18 de L, sendo assim o comprimento da região central 1,6 vezes maior que o das extremidades.

5.5.1. P1

Os mapas de espraio de não linearidades do pórtico P1 encontram-se no Anexo B-1 e B-2, e apresentam o estado da estrutura na etapa 11 de carregamento, de 1100 kN, que corresponde ao valor de carga de projeto teórico (ver item 5.4.1), e na etapa imediatamente anterior à carga última (1419 kN).

Vale comentar que as primeiras fissuras no concreto ocorreram nas duas extremidades da viga. O primeiro ponto de escoamento do aço das armaduras e pico de compressão no concreto ocorreu na extrema direita da viga.

O mapa da etapa 11 mostra que grande parte da viga e dos pilares havia sofrido fissuração intensa sob carga de 1100 kN. Dois pontos de

escoamento do aço também foram registrados, nas extremidades das vigas.

Em relação à última etapa de carga, 1419 kN, a fissuração do concreto e o escoamento do aço das armaduras evoluíram consideravelmente, além de ser registrado também pontos de pico de compressão no concreto, tanto na base do pilar direito, quanto nas extremidades da viga.

Como resultado geral, a viga foi o elemento que mais sofreu desgaste, além da grande quantidade de elementos e lamelas fissuradas, o aço das duas camadas de armaduras, nas duas extremidades, escoaram e o pico de compressão no concreto também foi atingido nessas regiões. O elemento menos danificado foi o pilar esquerdo do pórtico, que sofreu apenas fissuração.

5.5.2. P2

Para este pórtico P2 apresentam-se os mapas de espraçamento de não linearidades no anexo C-1 e C-2, correspondentes à etapa de carga de projeto, 7,7 kN, e à última etapa imediatamente anterior à perda de estabilidade do modelo, a 8,94 kN.

A primeira fissura no concreto ocorreu no pórtico na região de momento positivo da viga do primeiro pavimento, e o pico de compressão no concreto ocorreu na base do pilar do térreo à direita.

Iniciando a análise pelo mapa da etapa de carregamento de 7,7 kN (carga de projeto), nota-se que a viga do primeiro andar foi a que apresentou os maiores desgastes por fissuração no concreto, principalmente na região de momento positivo. A ligação dos pilares com as vigas à direita do pórtico apresentaram fissuração, tanto nas vigas quanto pilares.

Avançando para a última etapa de carga (8,94 kN) e comparando os resultados, observa-se que as duas vigas inferiores e o pilar térreo à direita foram os elementos que mais sofreram danos, este último com ocorrência de pico de compressão no concreto. As vigas do primeiro e segundo pavimento não sofreram grande aumento de fissuração no concreto. A viga do terceiro pavimento praticamente não sofreu alterações em relação à etapa de carga de 7,7 kN, apenas algumas novas lamelas fissuraram nos elementos já danificados. A viga da cobertura apresentou algumas fissuras na região de momento positivo.

Para este pórtico o maior desgaste se concentra principalmente nas duas vigas inferiores, havendo algum desgaste também dos pilares à direita.

5.5.3. P3

Para este pórtico P3 escolheram-se as etapas de carga de 16,8 kN, carga de projeto, e a etapa imediatamente anterior à carga última, carga de 24 kN, para ilustrar os mapas de espraçamento das não linearidades (ver anexos D-1 e D-2, respectivamente). No modelo deste pórtico não foi atingida a ruptura do aço das armaduras nem o pico de compressão no concreto antes da carga última.

A primeira fissura no concreto ocorreu na região de momento positivo da viga do primeiro andar, enquanto o primeiro ponto de escoamento do aço das armaduras se deu na região de momento positivo da viga do segundo pavimento.

Analisando a etapa de carga 16,8 kN, nota-se primeiramente que as vigas do primeiro, segundo e terceiro pavimento encontram-se mais fissuradas, tanto nas regiões de momento positivo quanto nas de negativo. Dentre as vigas, a do segundo andar foi a mais danificada de todas.

As ligações viga/pilar à esquerda do pórtico apresentaram algumas fissuras, enquanto do lado direito do pórtico os pilares permaneceram intactos, salvo o pilar do último pavimento, que sofreu danos de fissuração no encontro com as vigas.

A viga do último pavimento apresentou curvatura negativa, portanto momento negativo, e fissuração na parte superior ao longo de toda a sua extensão. Esse comportamento é distinto do observado no diagrama de momento fletor da análise elástico linear, que previa momento positivo em parte da peça.

Passando ao mapa de não linearidades na etapa de carga 24 kN, observa-se principalmente a evolução dos danos registrados na etapa de 16,8 kN. As vigas do primeiro ao terceiro andar foram as mais desgastadas pela fissuração do concreto, sendo que as do primeiro e segundo pavimento apresentaram pontos de escoamento do aço das armaduras na região de momento positivo.

As ligações viga/pilar à esquerda mostraram um aumento do nível de fissuração do concreto, enquanto as da direita permaneceram igualmente intactas. Apenas a base do pilar do térreo à direita, que antes estava intacto, apresentou ligeira fissuração. Ressalta-se que a viga do topo apresentou aumento do nível de fissuração ao longo do seu comprimento.

De forma geral, imediatamente antes da carga última ser atingida em cada pórtico, ocorreu escoamento do aço das armaduras e excesso de fissuras principalmente nas vigas inferiores, havendo desgaste das

ligações entre vigas e pilares do lado esquerdo do pórtico. Os pilares à direita foram os que se mantiveram, em sua maioria, mais íntegros.

5.5.4. P4

Neste item apresentam-se para o pórtico P4 os mapas de espraimento de não linearidade para a etapa de carga de projeto de 18,2 kN e para a etapa imediatamente anterior à carga última, igual a 20,03 kN, os quais encontram-se no anexo E-1 e E-2.

Deve-se notar que a primeira fissura no concreto ocorreu no vão interno da viga do primeiro e do segundo andar. Os primeiros pontos de escoamento do aço das armaduras ocorreram nestas mesmas posições.

Analizando primeiro o mapa da etapa de carga de 18,2 kN, nota-se que as vigas inferiores são as mais desgastadas pela fissuração no concreto. Nas vigas do primeiro e segundo andar, há a ocorrência dos únicos pontos de escoamento do aço das armaduras nos trechos de momento positivo para esse nível de carga.

As vigas mostram uma mudança no padrão de fissuras no concreto ao longo da altura, de forma que na porção inferior do pórtico elas sofrem fissuração nos momentos positivos e negativos de cada vão. Na parte superior do pórtico há predominância de fissuração na região de momento negativo nos vão externos e positivo nos internos.

Os pilares apresentaram fissuras na ligação com as vigas na parte superior do pórtico. Os pilares da extrema direita do pórtico foram menos solicitados, ficando praticamente todos intactos. Vale ressaltar que o pilar do último pavimento sofreu fissuração considerável na ligação com as vigas.

O mapa da última etapa de carga (anexo E-2) mostra a evolução considerável do estado de desgaste do pórtico em relação ao mapa correspondente à carga de projeto (anexo E-1). Novamente as vigas inferiores, em especial do primeiro e segundo pavimento, apresentam fissuração do concreto avançada e vários pontos de escoamento do aço das armaduras.

Ficou clara a ocorrência de uma redistribuição de esforços nas vigas inferiores, como é possível comparar no detalhe de viga do segundo pavimento (Figuras 5-39 e 5-40). As vigas do primeiro, segundo e terceiro andar apresentavam fissuração no concreto que se estendia além de um elemento sob a carga de 18,2 kN. Na última etapa de carga essas regiões sofreram escoamento do aço da armadura e houve diminuição do nível de fissura no elemento adjacente.

Houve também danos nos pilares, nas ligações com as vigas, inclusive no pilar da extrema direita (antes intactos sob carga de 18,2 kN), e houve evolução de fissuração no concreto nas regiões já fissuradas na etapa de carga de projeto.

De forma geral, a ruptura do pórtico se deu, em grande parte, por conta de consideráveis danos nas vigas inferiores. As vigas superiores também mostraram fissuras no concreto em grau decrescente ao longo da altura até o topo. Também houve certo desgaste nos pilares, mas eles foram as peças estruturais menos afetadas.

Figura 5-39 - Viga do segundo pavimento sob carga de 18,2 kN

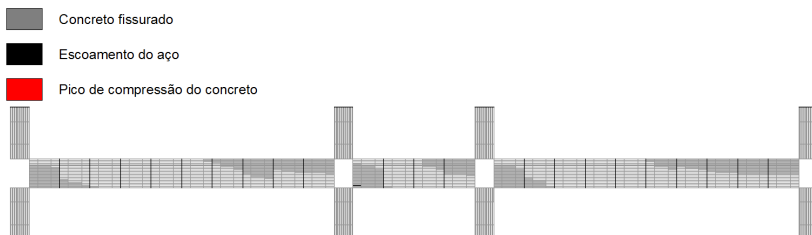
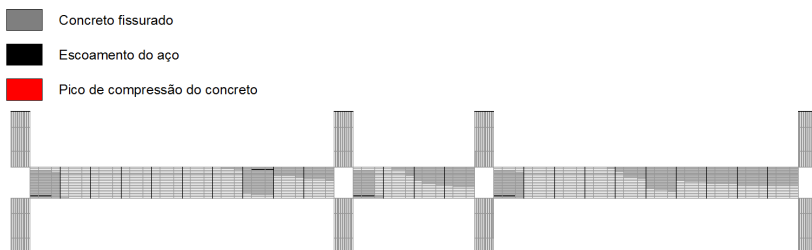


Figura 5-40 - Viga do segundo pavimento sob carga de 20,034 kN



5.5.5. P5

Para o pórtico P5 mostram-se os mapas de espraio de não linearidades referentes à etapa 10, correspondente à carga de projeto de 26 kN, e à última etapa de carga de 28,44 kN, imediatamente anterior à etapa em que não foi possível se obter convergência no algoritmo de resolução das equações não lineares. Os mapas estão nos anexos F-1 e F-2.

A ruptura do aço das armaduras e o pico de compressão do concreto não foram atingidos até a carga de 28,44 kN. Interessante comentar que a primeira fissura no concreto ocorreu na região de momento positivo da viga do segundo andar e o primeiro ponto de

escoamento do aço das armaduras foi na região de momento positivo da viga do terceiro andar.

Analisando o mapa da etapa de carga de 26 kN, nota-se que nesta etapa apenas ocorreu fissuração das camadas de concreto. As vigas do primeiro ao sétimo pavimento são as mais afetadas pela fissuração dentre todos os elementos do pórtico. Os pilares à direita do pórtico permaneceram intactos, enquanto os pilares da esquerda sofreram fissuração do concreto na ligação com as vigas.

Em relação ao mapa da etapa anterior à carga última, observa-se a evolução do desgaste principalmente nas vigas do segundo ao quinto pavimento, com escoamento do aço da armadura negativa e positiva no momento negativo e positivo das mesmas. As vigas do primeiro e sexto pavimento apresentaram escoamento do aço das armaduras apenas na região de momento positivo.

Os pilares da direita continuaram praticamente intactos, enquanto o encontro viga/pilar à esquerda do pórtico apresentou evolução das fissuras do concreto nos pilares.

De forma geral algumas vigas foram bastante afetadas, enquanto outras foram pouco desgastadas. As vigas inferiores, do primeiro ao quinto andar, foram os elementos mais danificados durante o carregamento. A fissuração do concreto nas vigas tendeu a diminuir nos andares superiores. A viga da cobertura foi a menos afetada durante toda a análise e os pilares foram pouco afetados ao longo da história de carregamento.

5.5.6. P6

Para este pórtico P6 apresentam-se os mapas de espraçamento de não linearidades para a etapa 10, correspondente à carga de projeto de 7,82 kN, e para a etapa de carga de 11,378 kN, sendo esta a etapa imediatamente anterior à carga última. Os mapas encontram-se no anexo G-1 e G-2. Para facilitar o entendimento da análise os pilares são tratados como central (40 cm X 140 cm) e pilares externos (40 cm X 80 cm).

As primeiras ocorrências foram: fissura do concreto no vão esquerdo da viga do quarto pavimento, na região de momento positivo; escoamento do aço das armaduras no vão esquerdo da viga do terceiro pavimento e também na região de momento positivo; e pico de compressão do concreto na base do pilar do térreo.

Inicialmente, analisando o mapa da etapa 10 (carga de projeto), nota-se que os pilares estão totalmente intactos e que toda a perda de

rigidez das seções foi por conta da fissuração do concreto nas vigas, já que não houve nenhuma outra ocorrência de material. A observação do desgaste das vigas mostra que as mais afetadas foram as do segundo ao oitavo pavimento, apresentando entre 3 e 4 elementos fissurados na extremidade de cada vão. As duas vigas do topo do pórtico não apresentaram qualquer fissura.

Passando ao mapa da etapa de carga de 11,378 kN, o quadro de deterioração mostra considerável evolução. Os pilares, em grande parte, se mantiveram intactos. As exceções são:

- (i). pilar externo de cobertura: no pilar externo à esquerda, fissuraram as duas lamelas de concreto da seção, no lado esquerdo;
- (ii). pilar externo do primeiro pavimento: no pilar externo à direita, o pico de compressão do concreto foi atingido em várias lamelas no elemento da base;
- (iii). pilar central: no elemento da base do pilar houve fissura do concreto em uma única lamela, e houve pico de compressão do concreto em dois elementos na base; ao mesmo tempo o aço da armadura escoou sob compressão nessa mesma região.

Quanto às vigas, houve aumento de fissuração do concreto no trecho de momento negativo, espalhando até atingir seis elementos do respectivo trecho do diagrama de momento e apresentando escoamento do aço da armadura negativa em dois pontos de Gauss do primeiro elemento desse trecho do diagrama.

Nos trechos de momento positivo na viga, a fissuração do concreto evoluiu no primeiro elemento do trecho do diagrama e o aço da armadura positiva escoou no mesmo elemento. Interessante notar que, em várias vigas, no elemento adjacente àquele em que o aço escoou houve redução da fissuração em relação à etapa 10, mostrando que ocorreu redistribuição de esforços na região. Este efeito pode ser analisado em detalhes nas Figuras 5-41 e 5-42, em que se mostra a viga do segundo pavimento nas duas etapas.

De forma geral, os pontos de escoamento do aço das armaduras ocorrem nas vigas nas regiões de momento positivo e negativo ao mesmo tempo, e há fissuração do concreto avançada nas vigas do terceiro ao oitavo pavimento. Estas são as vigas mais danificadas. Os pavimentos oitavo ao décimo segundo apresentam pontos de

escoamento do aço das armaduras apenas no trecho de momento positivo das vigas.

As duas últimas vigas superiores passaram a apresentar fissuração do concreto, sendo que na etapa 10 estavam intactas.

O estado limite último deste pórtico foi atingido com considerável desgaste das vigas da metade inferior do pórtico, e menor desgaste nas vigas da metade superior. Os pilares foram os elementos menos danificados, com algumas ocorrências de fissura do concreto, escoamento de aço das armaduras e de pico de compressão do concreto, sendo esta apenas na base do pórtico.

Figura 5-41 - Viga do segundo pavimento sob carga de 7,82 kN

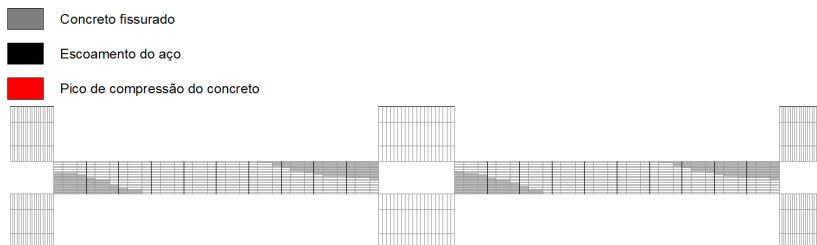
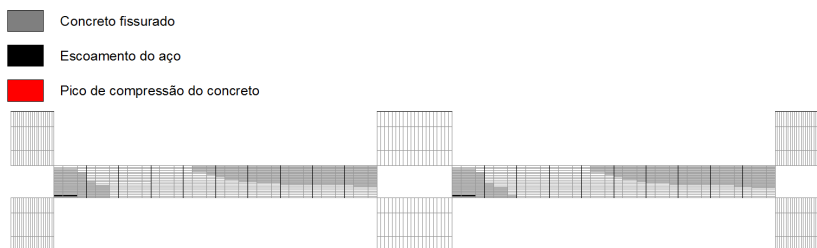


Figura 5-42 - Viga do segundo pavimento sob carga de 11,378 kN



5.5.7. Comentários das análises

Para os pórticos P1 e P4 os pontos onde ocorreram as primeiras fissuras no concreto coincidiram com os pontos onde iniciou o escoamento do aço das armaduras. Interessante notar que essas primeiras ocorrências se dão nas vigas inferiores, geralmente do primeiro e segundo pavimento. Na última etapa de carga, imediatamente antes de o pórtico atingir a carga última, os primeiros pontos de ocorrência das fissuras no concreto e escoamento do aço das armaduras são as regiões mais danificadas do pórtico.

Em vários pórticos houve plastificação do aço das armaduras, com um trecho de pós-escoamento bem definido na curva carga *versus* deslocamento. Foi possível concluir que a perda de rigidez dos pórticos antes da plastificação do aço se deu principalmente em função da evolução da fissuração do concreto, a qual ocorreu principalmente nas vigas inferiores. Após a plastificação do aço, as ocorrências mais comuns foram a evolução do escoamento do aço das armaduras ao longo do pórtico, e, para alguns pórticos, houve pontos em que se atingiu o pico de compressão do concreto.

De uma maneira geral, os eventos de não linearidade física mais registrados nos pórticos foram a fissuração do concreto e o escoamento do aço das armaduras. O pico de compressão do concreto ocorreu apenas em alguns exemplos, na base dos pilares, e raramente ocorreu a ruptura do aço das armaduras. Esse dois últimos eventos, quando registrados, ocorreram em níveis de carga elevados, próximos à ruptura do pórtico.

Com as informações do programa ANALEST, que permitiram a criação dos mapas de espraçamento de não linearidades dos materiais, também foi possível observar a ocorrência de redistribuição de tensões internas nos elementos. Isso foi notado na comparação entre mapas de diferentes etapas de carregamento, e se caracterizou pela redução da área fissurada de vigas após a plastificação do aço naquela região do elemento. Esse efeito foi observado nas vigas inferiores de alguns dos pórticos.

Quanto à distribuição das não linearidades ao longo dos pórticos, a porção média inferior foi a que mais sofreu efeitos da não linearidade física, sendo as vigas os elementos mais danificados. De uma maneira geral, os pilares foram os elementos estruturais menos danificados nos pórticos.

5.6. COMPARAÇÃO ENTRE MODELO DO ANALEST E MODELO SIMPLIFICADO USANDO PROGRAMA SAP2000

Preliminarmente, comparam-se as formulações de não linearidade geométrica utilizadas no programa ANALEST e no SAP2000, admitindo-se que os materiais tenham comportamento elástico linear. Utiliza-se nos modelos a área bruta das seções transversais dos elementos, sem inclusão das armaduras de aço.

Em seguida compara-se o modelo do ANALEST refinado, considerando-se ambas não linearidades, geométrica e física (NLGF), com modelos simplificados utilizando-se o programa SAP2000, em que

a não linearidade geométrica é considerada por meio da Matriz de Rigidez Geométrica K_g , e a não linearidade física é considerada por meio das reduções de rigidez recomendadas pela NBR-6118/2007 e também as recomendadas por Pinto (2002).

É importante comentar que para investigar as reduções de rigidez propostas pela NBR-6118/2007 e por outros autores, optou-se por se usar o SAP2000, pois o ANALEST teria que ser modificado na programação, tendo em vista que as rigidezes, axial e de flexão, são obtidas por integração das lamelas na seção. Além disso, o SAP2000 é um programa de fácil utilização e muito empregado por projetistas.

5.6.1. NLG no programa SAP2000

O programa SAP2000 faz a consideração da não linearidade geométrica de duas formas possíveis, por meio do efeito P-delta ou por meio do efeito de Grandes Deslocamentos (*large displacements*), de acordo com o manual do programa (SAP2000 PLUS, 2009). Em ambos os casos as deformações dentro do elemento são sempre admitidas como pequenas.

O caso de análise com o efeito P-Delta é aplicado quando grandes tensões estão presentes na estrutura, como é o caso de edifício de concreto armado em geral. Já para o caso onde a estrutura sofre grandes deslocamentos, como no caso de vigas em balanço, cabos, ou estruturas sofrendo flambagem, é indicada a análise por meio de efeito de Grandes Deslocamentos.

A implementação numérica da análise P-Delta utiliza o processo da Matriz de Rigidez Geométrica (K_g), (Cook, 1989) matriz. Esta é uma formulação simplificada, pois considera uma matriz única na formulação (ver equação (93) no item 4.4), enquanto que no programa ANALEST utiliza-se a formulação completa, levando em consideração quatro matrizes na formação da matriz de rigidez tangente da estrutura, ver equação (92). Já a opção de análise com Grandes Deslocamentos no SAP 2000 também utiliza uma formulação completa e mais rigorosa, semelhante à utilizada no ANALEST, porém seguindo a formulação Lagrangeana Atualizada ao invés da Total.

O manual do programa recomenda que seja feita primeiramente a análise com o efeito P-Delta, adicionando os efeitos de Grandes Deslocamentos posteriormente, quando necessário.

No programa SAP2000 a resolução das equações não lineares é feita iterativamente para cada incremento de carga, sendo que, se o equilíbrio não for atingido, o programa fraciona o incremento de carga

em incrementos menores e realiza a análise novamente. O programa ainda disponibiliza o controle de parâmetros da análise não linear, sendo que parte das configurações padrão prevê que o método de solução das equações de equilíbrio seja o Newton-Raphson modificado, onde a matriz de rigidez da estrutura é atualizada apenas a cada incremento de carga. Se na entrada de dados do programa seleciona-se zero para a quantidade de iterações com rigidez constante, o programa passa a resolver as equações por meio de Newton-Raphson original (tangente), atualizando a matriz de rigidez a cada iteração de cada incremento de carga.

5.6.1.1. Resultados entre análises de NLG no SAP2000

No presente estudo, inicialmente investigou-se a diferença nos resultados das análises entre os dois tipos de efeitos de não linearidade geométrica disponíveis no programa SAP2000, descritos no item 6.3.1: efeito P-Delta apenas, e efeito P-Delta associado ao de Grandes Deslocamentos. As análises foram efetuadas tanto considerando material elástico linear como considerando não linearidade física de maneira simplificada, por meio de diferentes reduções da rigidez elástica inicial dos elementos.

Foi escolhido o pórtico P5, que apresenta o maior valor do parâmetro de instabilidade ($\alpha=0,82$), para mostrar a semelhança entre os resultados dos dois tipos de NLG nas análises. Apresentam-se os resultados em termos de valores numéricos nas Tabelas 5-44 e 5-45, para material elástico linear e com linearidade física simplificada, respectivamente. Todos os resultados apresentados referem-se à carga de projeto (26 kN).

Tabela 5-44 - Comparativo entre análise P-Delta e análise P-Delta + Grandes Deslocamentos, para material elástico linear (SAP2000) – P5

Análise	P-Delta	P-Delta + Grandes Deslocamentos
Carga de projeto [kN] (lateral)	26	26
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	8,92	8,92

Tabela 5-45 - Comparativo entre análise P-Delta e análise P-Delta + Grandes Deslocamentos com NLG e NLF simplificada (SAP2000) - P5

Análise	Deslocamentos das análises [cm]		
	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$
P-Delta	12,52	15,93	19,35
P-Delta + Grande deslocamentos	12,52	15,93	19,34
Diferença relativa [%]	0	0	0,05

Observa-se das análises desse pórtico, P5, tanto para a análise apenas com a não linearidade geométrica (material elástico linear) quanto para análise com a não linearidade geométrica combinada com a não linearidade física simplificada, que os resultados entre os dois tipos de efeito de NLG considerado (apenas P-Delta e P-Delta mais grandes deslocamentos) foram praticamente iguais. O mesmo ocorreu para os demais pórticos descritos no item 5.2. Assim sendo, em todas as análises subsequentes dos pórticos com o programa SAP2000, descritas nos itens a seguir, utilizou-se a opção de apenas efeito P-Delta (matriz de rigidez geométrica, K_g) para a consideração de não linearidade geométrica, devido à maior rapidez das análises. Stramandinoli (2007) também havia investigado o modelo de não linearidade geométrica do ANALEST, comparando, para alguns pórticos de concreto armado, a formulação completa (com as quatro matrizes, ver equação (92)) com uma utilizando apenas a matriz de rigidez geométrica, K_g , e também obteve resultados praticamente coincidentes.

Ressalta-se que a formulação mais rigorosa para consideração da não linearidade geométrica do SAP2000 (P-Delta e grandes deslocamentos) é semelhante à formulação utilizada no programa ANALEST, sendo que o SAP2000 utiliza Formulação Lagrangeana Atualizada e, o ANALEST, Formulação Lagrangeana Total. Portanto nas análises comparativas entre o ANALEST e o programa SAP2000, a serem efetuadas nos próximos itens, as diferenças entre os resultados serão devidas essencialmente às diferentes considerações de não linearidade física (modelo refinado e modelos simplificados), conforme explicado no que se segue.

5.6.2. NLF no programa SAP2000

O programa SAP2000 já dispõe de algumas ferramentas para consideração da não linearidade física, tais como molas não lineares nas extremidades dos elementos de barra. Também apresenta curvas tensão *versus* deformação não lineares para o concreto sob compressão, inclusive com possibilidade de se considerar o confinamento dos estribos. Porém ainda não dispõe de um modelo refinado para considerar o comportamento do concreto armado pós-fissuração, simulando o efeito de transferência de tensões entre concreto e armadura, efeito *tension-stiffening*, etc. Buscando se investigar modelos simplificados utilizados por projetistas, optou-se neste trabalho em se utilizar no SAP2000 um modelo simplificado para consideração da não linearidade física, dando-se ênfase às recomendações da NBR-6118/2007. Primeiramente será admitida uma redução única das seções, tanto dos pilares quanto das vigas, utilizando-se $0,7E_{ci}I_c$, e em seguida considerando uma redução diferenciada, usando-se $0,8E_{ci}I_c$ para os pilares e $0,4E_{ci}I_c$ para as vigas.

Pinto (2002) fez um amplo estudo sobre redução da rigidez em pórticos planos de concreto armado e indicou outras reduções de rigidez para simular os efeitos da não linearidade física em função da taxa de armadura das vigas e pilares das estruturas.

Para pórticos com pilares e vigas com taxa de armadura em torno da média:

- (i). redução única de $0,55E_{ci}I_c$
- (ii). redução diferenciada de $0,4E_{ci}I_c$ para vigas e $0,8E_{ci}I_c$ para pilares.

Para pórticos com pilares e vigas com taxa de armadura próxima da máxima:

- (i). redução única de $0,7E_{ci}I_c$
- (ii). redução diferenciada de $0,5E_{ci}I_c$ para vigas e $0,8E_{ci}I_c$ para pilares.

Estas reduções propostas por Pinto também serão investigadas neste trabalho. Como os pórticos P2, P3, P4, P5 e P6 têm taxa de armadura em torno da média, eles serão testados apenas com a redução única de $0,55E_{ci}I_c$, já que a redução diferenciada indicada por Pinto (2002) é a mesma prevista pela NBR-6118/2007.

O único pórtico aqui estudado que apresenta taxa de armadura próxima da máxima é o P1, assim sendo, além das reduções propostas pela NBR6118/2007, também será investigada apenas a redução

diferenciada proposta por Pinto (2002), pois a redução única é a mesma indicada pela NBR-6118/2007.

Conforme será visto nos próximos itens, observou-se na comparação realizada que os resultados do modelo NLF simplificado com redução única para $0,7E_{ci}I_c$ foram os que mais se aproximaram dos resultados obtidos pelo modelo refinado do ANALEST, porém, o modelo simplificado mostrou-se um pouco mais rígido do que o modelo refinado, ou seja, contra a segurança. Entende-se que modelos simplificados deveriam ser sempre a favor da segurança, assim sendo, experimentou-se também um modelo simplificado com uma redução única para $0,65E_{ci}I_c$ ao invés de $0,7E_{ci}I_c$, buscando-se uma solução que simultaneamente se aproximasse mais da obtida pelo modelo refinado do ANALEST e que seja a favor da segurança.

5.6.3. P1

5.6.3.1. Estudo da não linearidade geométrica

Neste subitem compara-se, na análise do pórtico P1, o modelo NLG do ANALEST, considerando apenas a não linearidade geométrica na formulação, e o modelo do SAP2000 com não linearidade geométrica, admitindo-se material elástico linear em ambos os modelos.

Conforme foi explicado no item 5.4.1, será adotada uma carga de projeto teórica de 1100 kN para este pórtico especificamente, já que não houve informação do valor de carga de projeto utilizado pelos autores Silva (1996) e Oliveira (2007) na respectiva bibliografia.

A comparação está mostrada na Tabela 5-46. Nota-se que, admitindo material elástico linear, a diferença entre os modelos dos dois programas, que usam diferentes formulações de não linearidade geométrica, foi desprezível para este exemplo, apenas 0,31%. Lembrando que as formulações de não linearidade geométrica utilizadas pelos dois programas são diferentes, além de possíveis diferenças nos algoritmos de resolução de sistema de equações e precisão dos programas.

Tabela 5-46 - Comparativo de resultados – Estudo de NLG - P1

Modelo	ANALEST	SAP2000
Carga de projeto [kN] (lateral)	1100	1100
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,554	4,54

5.6.3.2. Estudo da não linearidade física simplificada

Neste subitem compara-se, na análise do pórtico P1, o modelo de referência do ANALEST, considerando ambas não linearidades na formulação (NLGF), e o modelo do SAP2000 que considera a não linearidade geométrica com a matriz de rigidez geométrica, mas a não linearidade física de forma simplificada, reduzindo-se a rigidez das seções dos elementos de acordo com a NBR-6118/2007. Para o pórtico P1, especificamente, foram testadas três reduções de inércia; redução única para 70% da rigidez inicial dos pilares e vigas, redução diferenciada para 80% da rigidez dos pilares e 40% da rigidez das vigas, e redução diferenciada para 80% da rigidez dos pilares e para 50% da rigidez das vigas. A segunda redução diferenciada é estudada especificamente para este pórtico, pois as vigas apresentam armaduras simétricas.

Os resultados estão apresentados em termos de curvas carga (lateral) *versus* deslocamento no topo (lateral) na Figura 5-43 e, na Tabela 5-47, em termos de deslocamento (lateral) no topo correspondente à carga de projeto (lateral).

Figura 5-43 - Carga X deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P1

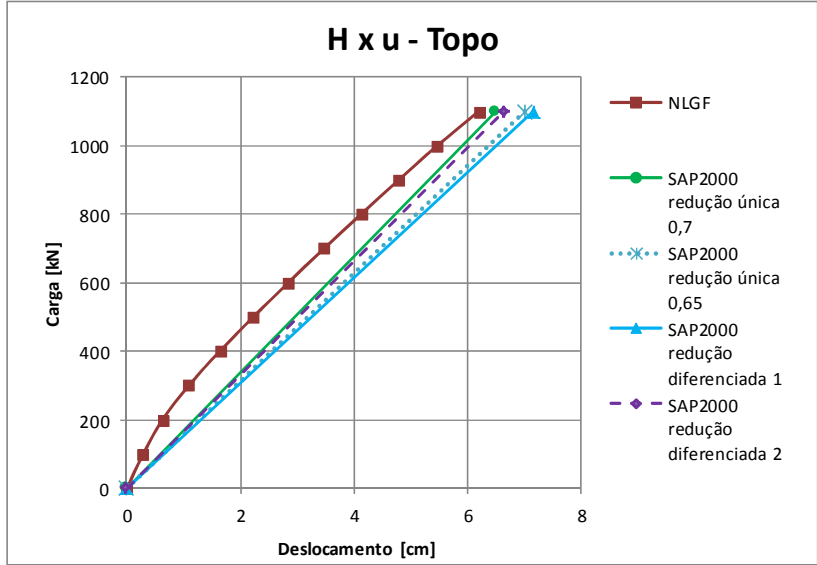


Tabela 5-47 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P1

Modelo	NLGF	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,65E_{ci}I_c$	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$	Redução diferenciada 2 – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,5E_{ci}I_c$
Carga de projeto (lateral) [kN]	1100	1100	1100	1100	1100
Deslocamento no topo (lateral) [cm]	6,198	6,50	7,01	7,16	6,64
Diferença relativa [%]	-	4,87	13,10	15,52	7,13

Observa-se da Figura 6-14 que neste exemplo as curvas obtidas pelo SAP2000 com o modelo de redução única de $0,7E_{ci}I_c$ e com o de redução diferenciada 2 indicadas pela NBR foram praticamente coincidentes e se aproximaram mais da curva do modelo NLGF do ANALEST do que o modelo com redução diferenciada 1. Foi testada também uma redução única de rigidez nos elementos para 65% da

rigidez inicial, porém esta não apresentou bons resultados em comparação com os outros modelos simplificados.

Os quatro modelos com a NLF simplificada apresentaram deslocamento de topo superior ao modelo de referência do ANALEST. O modelo que mais se aproximou do modelo do ANALEST (NLGF) foi aquele que considerou a redução única de $0,7E_{ci}I_c$, com a menor diferença relativa, 4,87%. O modelo que apresentou maior diferença em relação ao ANALEST foi aquele com a redução diferenciada 1, mostrando que a redução de rigidez das vigas para 40% da rigidez original e para 80% da rigidez original dos pilares foi muito conservadora.

5.6.4. P2

5.6.4.1. Estudo da não linearidade geométrica

Neste subitem compara-se, na análise do pórtico P2, o modelo NLG do ANALEST, considerando apenas a não linearidade geométrica na formulação, e o modelo do SAP2000 com não linearidade geométrica, admitindo-se material elástico linear em ambos os modelos. A malha utilizada no programa SAP2000 foi igual à malha usada no modelo do programa ANALEST, mostrada na Figura 5-2. Nos dois programas o algoritmo de Newton-Raphson tangente foi utilizado.

Os resultados em termos de deslocamento lateral no topo para a carga de projeto lateral (7,7 kN) estão mostrados na Tabela 5-48. Observa-se desta tabela uma diferença de 3,14% entre os valores obtidos pelos modelos dos dois programas. Nota-se assim que as diferentes formulações de não linearidade geométrica dos programas utilizados conduziram a resultados bem semelhantes, também para este exemplo, considerando-se material elástico linear.

Tabela 5-48 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P2

Modelo	ANALEST	SAP2000
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,7	7,7
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	5,312	5,15

5.6.4.2. Estudo da não linearidade física simplificada

Neste subitem compara-se, na análise do pórtico P2, o modelo de referência do ANALEST, considerando ambas não linearidades na formulação (NLGF), e o modelo do SAP2000 com não linearidade

geométrica e com não linearidade física simplificada, reduzindo-se a rigidez das seções dos elementos de acordo com a NBR-6118/2007. Foram investigadas três reduções de rigidez das peças: redução única para 70% da rigidez inicial de todas as peças (NBR-6118/2007); redução única para 0,55% da rigidez inicial de todas as peças (Pinto, 2002); e redução diferenciada para 80% da rigidez inicial dos pilares e para 40% da rigidez inicial das vigas (NBR-6118/2007). Aplicou-se em todos os modelos (simplificados e do ANALEST) uma carga de projeto, lateral, de 7,7 kN. Os resultados estão mostrados na Figura 5-44 e na Tabela 5-49.

Figura 5-44 - Carga X deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P2

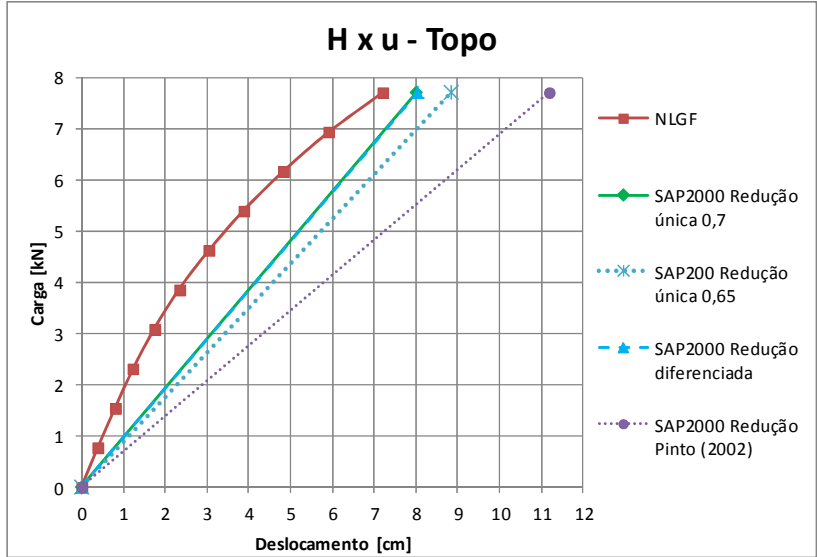


Tabela 5-49 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P2

Modelo	NLGF	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,65E_{ci}I_c$	Redução única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,7	7,7	7,7	7,7	7,7
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	7,204	8,01	8,84	11,18	8,04
Diferença relativa [%]	-	11,19	22,71	55,19	11,60

Observa-se da Figura 5-44 que neste exemplo as curvas carga-deslocamento obtidas pelo SAP2000 com a redução única de $0,7E_{ci}I_c$ e com a redução diferenciada indicadas pela NBR foram praticamente coincidentes e se aproximaram mais da curva do modelo NLGF do que a curva obtida com a redução proposta por Pinto (2002). A diferença entre os deslocamentos laterais no topo para carga de projeto ficaram em torno de 11% para os modelos com redução de rigidez indicadas pela NBR.

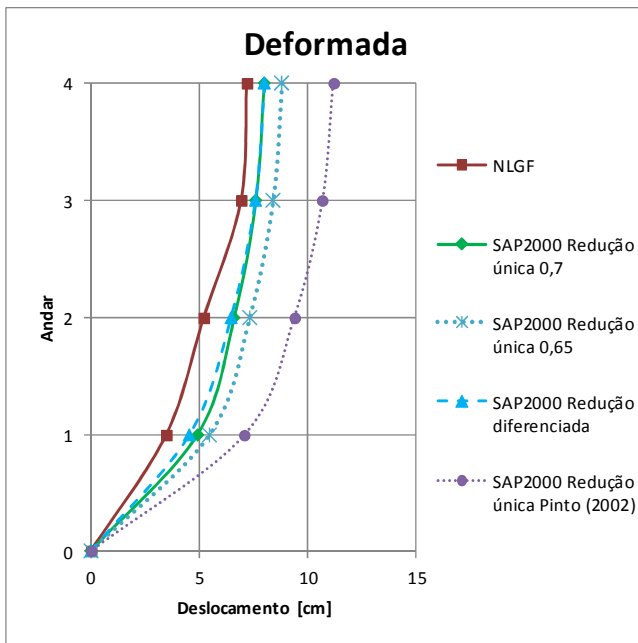
Também foi investigado um modelo com redução única de rigidez dos elementos para $0,65E_{ci}I_c$. A curva carga-deslocamento deste modelo não se ajustou tão bem à do modelo de referência quanto à do modelo de redução única para $0,7E_{ci}I_c$, mas ficou mais próxima do que a do modelo com redução única para $0,55E_{ci}I_c$ proposto por Pinto (2002). Interessante notar da Tabela 5-49 que pequenas diferenças na redução de rigidez podem causar grandes diferenças nos resultados dos deslocamentos.

Apresenta-se na Figura 5-45 a deformada (deslocamentos laterais) obtida pelos diferentes modelos para o nível de carga de projeto (7,7 kN).

As deformadas do pórtico obtidas dos modelos com redução única de $0,7E_{ci}I_c$ e redução diferenciada foram próximos em todos os andares. Estes modelos simplificados foram mais flexíveis que o do ANALEST em todos os pavimentos. O modelo com redução única de $0,65E_{ci}I_c$ apresentou resultados de deslocamentos dos pavimentos relativamente maiores que os modelos citados anteriormente, porém, acompanhando-os com diferença constante ao longo da altura. Já o

modelo com redução única de Pinto (2002) mostrou-se mais flexível dentre todos os testados ao longo de toda altura do pórtico.

Figura 5-45 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P2



5.6.5. P3

5.6.5.1. Estudo da não linearidade geométrica

Neste subitem compara-se, na análise do pórtico P3, o modelo NLG do ANALEST, considerando apenas a não linearidade geométrica na formulação, e o modelo do SAP2000 com não linearidade geométrica, admitindo-se material elástico linear em ambos os modelos. A malha utilizada para este estudo foi a da Figura 5-3. O algoritmo usado nos dois programas foi o Newton-Raphson tangente.

Os resultados de deslocamento lateral no topo, correspondente à carga de projeto (16,8 kN) estão mostrados na Tabela 5-50. A diferença relativa entre os valores obtidos foi muito pequena, apenas 0,8%.

Tabela 5-50 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P3

Modelo	ANALEST	SAP2000
Carga de projeto [kN] (lateral)	16,8	16,8
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	2,893	2,87

5.6.5.2. Estudo da não linearidade física simplificada

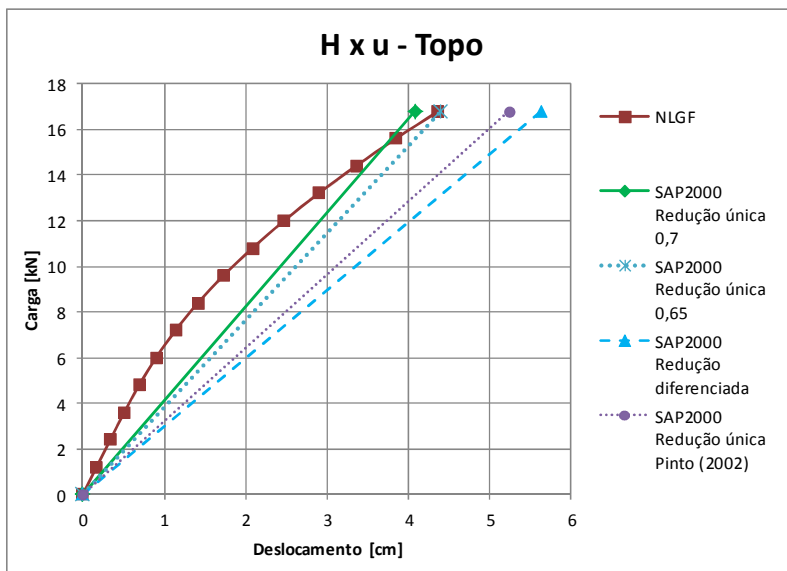
Neste estudo da não linearidade física simplificada para o pórtico P3, utilizaram-se no modelo do programa SAP2000 as duas reduções de rigidez recomendadas pela NBR-6118/2007 e a redução única de Pinto (2002). Os resultados são comparados com o modelo de referência do ANALEST, com as duas não linearidades consideradas (NLGF), em termos de curvas carga *versus* deslocamento lateral no topo (Figura 5-46), tabelas com resultados numéricos (Tabela 5-51) e deformadas (deslocamentos laterais) ao longo da altura do pórtico (Figura 5-47).

Para a comparação aplicou-se em todos os modelos, do SAP2000 e o do ANALEST, uma carga total correspondente à carga de projeto (16,8 kN).

Tabela 5-51 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P3

Modelo	NLGF	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,65E_{ci}I_c$	Redução única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$
Carga de projeto [kN] (lateral)	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,366	4,08	4,40	5,23	5,63
Diferença relativa [%]	-	6,55	0,78	19,79	28,95

Figura 5-46 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P3



O modelo simplificado com redução única de $0,7E_{ci}I_c$ mostrou uma boa aproximação em relação ao modelo de referência NLGF, mas ficou um pouco mais rígido, portanto contra a segurança. Os outros modelos testados apresentaram resultados de deslocamento maiores em relação ao modelo de referência, com considerável diferença em relação a este.

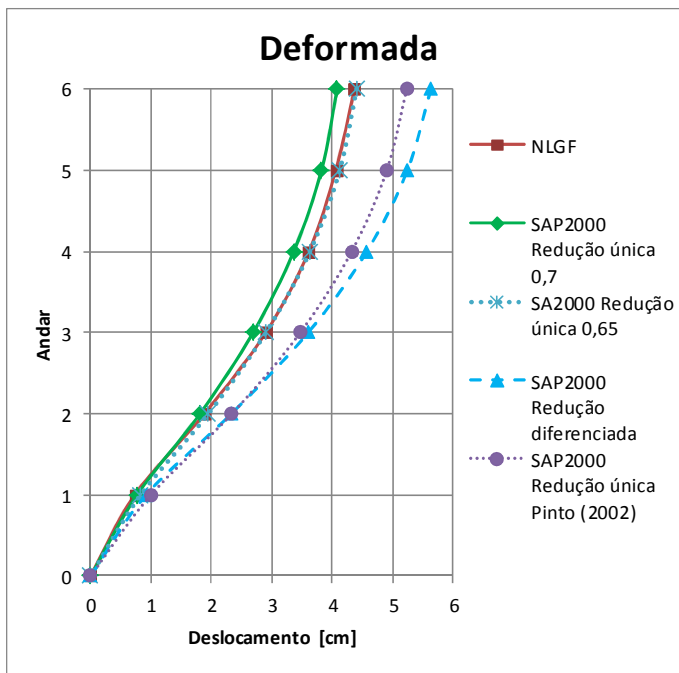
Buscando um modelo simplificado que se ajustasse ao de referência e com comportamento a favor da segurança, a redução única de $0,65E_{ci}I_c$ também foi investigada. Este modelo foi o que melhor se aproximou do modelo de referência com uma diferença de apenas 0,78%, além de ficar a favor da segurança.

Também em relação à deformada (Figura 5-47) o modelo simplificado com redução única ($0,65E_{ci}I_c$) apresentou ajuste excelente em relação à deformada do modelo do ANALEST. Deve-se comentar também que este modelo apresentou resultados a favor da segurança ao longo de toda a altura do pórtico. O modelo de redução única ($0,7E_{ci}I_c$) também mostrou resultados de deslocamentos próximos dos modelos de referência ao longo da altura do pórtico, porém, com diferença um pouco maior, além de ficar contra a segurança.

Os outros dois modelos, com redução única de Pinto (2002) e a diferenciada da NBR, foram mais flexíveis, sendo esse último com a

maior diferença em relação ao modelo de referência. Observando-se as suas deformadas, estes modelos apresentaram curvas próximas até o terceiro pavimento, e, acima desse, notou-se uma pequena diferença.

Figura 5-47 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P3



5.6.6. P4

5.6.6.1. Estudo da não linearidade geométrica

Compara-se agora, para o pórtico P4, o modelo NLG do ANALEST, considerando apenas a não linearidade geométrica na formulação, e o modelo do SAP2000 com não linearidade geométrica, admitindo-se material elástico linear em ambos os modelos. A malha utilizada no programa SAP2000 foi igual à apresentada na Figura 5-4. O algoritmo utilizado para equilíbrio das equações não lineares foi o Newton-Raphson tangente em ambos programas.

Os resultados obtidos pelos diferentes modelos, em termos de deslocamento lateral no topo correspondente à carga de projeto (18,2

kN) estão mostrados na Tabela 5-52. A diferença de resultados para este exemplo foi desprezível, apenas 0,25%.

Tabela 5-52 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P4

Modelo	ANALEST	SAP2000
Carga de projeto [kN] (lateral)	18,2	18,2
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	3,232	3,24

5.6.6.2. Estudo da não linearidade física simplificada

Neste estudo da não linearidade física simplificada para o pórtico P4, utilizaram-se no modelo do SAP2000 as duas reduções de rigidez recomendadas pela NBR-6118/2007 e a redução única de Pinto (2002). Os modelos simplificados são comparados com o modelo de referência do ANALEST, com as duas não linearidades consideradas (NLGF). Em todos os modelos, do SAP2000 e no do ANALEST, aplicou-se uma carga lateral total correspondente à carga de projeto (18,2 kN).

Os resultados são apresentados em termos de curvas carga *versus* deslocamento lateral no topo (Figura 5-48), tabela com resultados numéricos (Tabela 5-53) e deformadas (deslocamentos laterais) ao longo da altura do pórtico (Figura 5-49).

Tabela 5-53 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P4

Modelo	NLGF	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,65E_{ci}I_c$	Redução única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$
Carga de projeto [kN] (lateral)	18,2	18,2	18,2	18,2	18,2
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,942	4,65	5,02	5,99	6,03
Diferença relativa [%]	-	5,91	1,58	21,20	22,01

Com base nos resultados apresentados, nota-se que o modelo que admitiu redução única ($0,7E_{ci}I_c$) das peças foi o mais rígido entre os modelos simplificados e apresentou razoável aproximação em relação ao modelo NLGF do ANALEST, apesar de ser contra a segurança.

Buscando um modelo que se aproximasse ao de referência e que conduzisse a resultados a favor da segurança, foi investigado também um modelo com redução única para $0,65E_{ci}I_c$ da rigidez inicial dos elementos. Este foi o modelo que melhor se ajustou ao modelo de referência, gerando um deslocamento no topo maior, portanto a favor da segurança, com diferença relativa de apenas 1,58%. Em relação à deformada do pórtico, este modelo de redução única apresenta resultados próximos daqueles do modelo de referência, ficando ligeiramente contra a segurança até o quinto pavimento, e a favor da segurança acima deste.

Já os modelos simplificados com redução diferenciada e com redução única de $0,55E_{ci}I_c$ mostraram um comportamento bem semelhante entre si e foram mais flexíveis, com maiores deslocamentos laterais no topo, ficando a favor da segurança em relação ao modelo de referência do ANALEST. Com relação às deformadas, os modelos simplificados com redução diferenciada e com redução única de $0,55E_{ci}I_c$ apresentaram deformadas praticamente coincidentes, e também se mostraram mais flexíveis em relação ao modelo do ANALEST, sendo que diferenças maiores em relação à deformada deste foram observadas a partir do quarto pavimento.

Figura 5-48 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P4

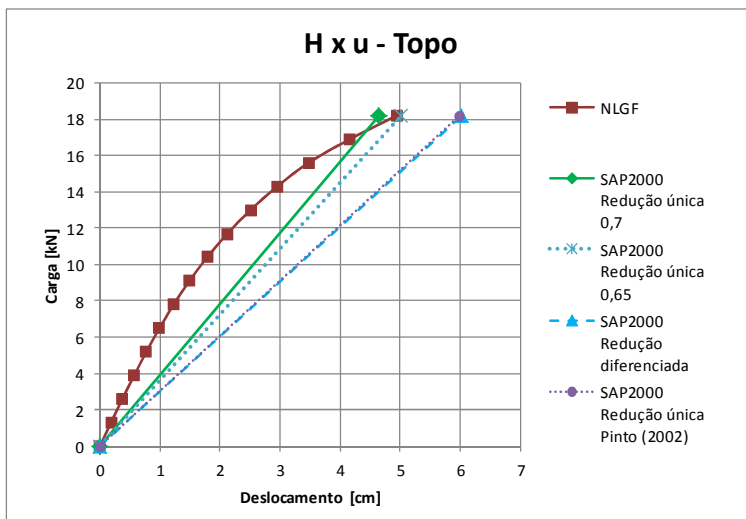
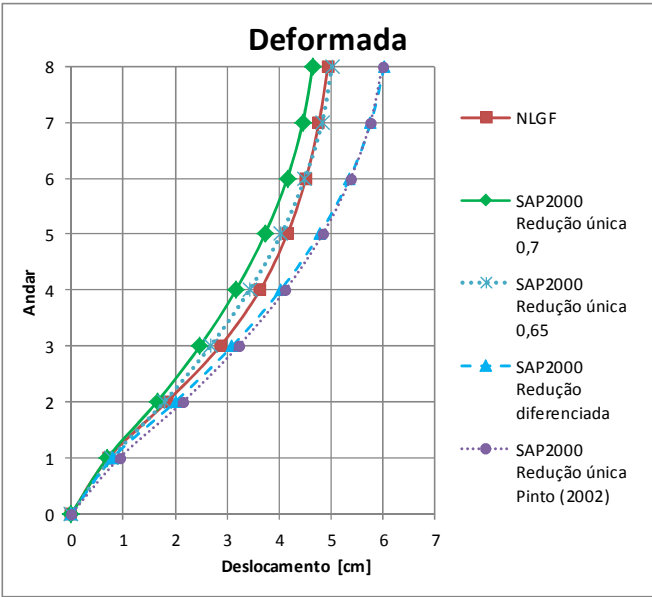


Figura 5-49 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P4



5.6.7. P5

5.6.7.1. Estudo da não linearidade geométrica

Neste subitem compara-se, na análise do pórtico P5, o modelo NLG do ANALEST, considerando apenas a não linearidade geométrica na formulação, e o modelo do SAP2000 com não linearidade geométrica, admitindo-se material elástico linear em ambos os modelos. A malha admitida foi a apresentada no item 5.2.5, a carga lateral aplicada foi a de projeto, 26 kN e o algoritmo de solução das equações não lineares foi o Newton-Raphson tangente nos dois programas.

A diferença entre os modelos, de acordo com os resultados da Tabela 5-54, é de 0,07%, que pode ser considerada desprezível.

Tabela 5-54 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P5

Modelo	ANALEST	SAP2000
Carga de projeto [kN] (lateral)	26	26
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	8,926	8,92

5.6.7.2. Estudo da não linearidade física simplificada

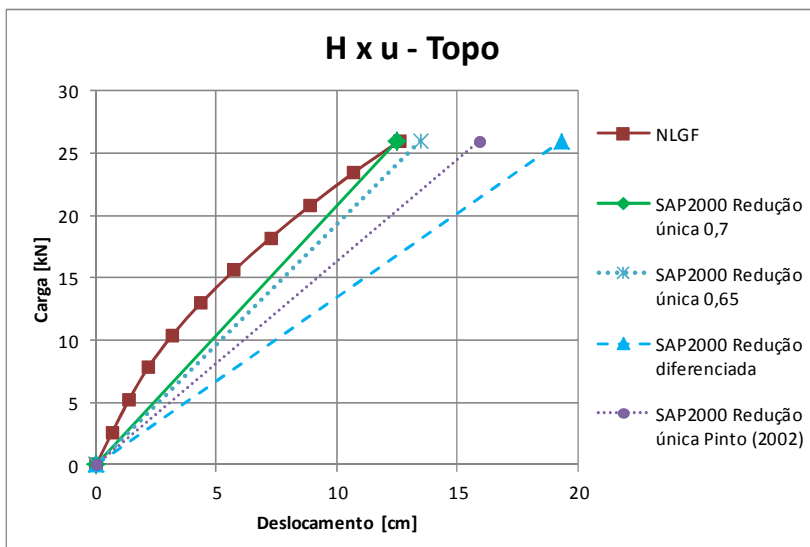
Os resultados dos modelos do programa SAP2000 a serem comparados apresentam os deslocamentos laterais no topo do pórtico para a carga de projeto (26 kN). Foram testadas quatro reduções de rigidez; redução única recomendada pela NBR-6118/2007 para $0,7E_{ci}I_c$; redução diferenciada recomendada pela NBR-6118/2007 para $0,8E_{ci}I_c$ para os pilares e $0,4E_{ci}I_c$; e redução única indicada por Pinto (2002) para $0,55E_{ci}I_c$.

Os resultados estão apresentados na Tabela 5-55 e na Figura 5-50, em termos de curva carga *versus* deslocamento, e na Figura 5-51, onde estão apresentadas as deformadas dos modelos.

Tabela 5-55 - Comparativo de resultados carga de projeto - Estudo NLGF simplificada - P5

Modelo	NLGF	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,65E_{ci}I_c$	Redução única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$
Carga de projeto [kN] (lateral)	26	26	26	26	26
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	12,614	12,52	13,48	15,93	19,35
Diferença relativa [%]	-	0,74	6,86	26,29	53,4

Figura 5-50 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P5



Observando os dados da Tabela 5-55 fica evidente a diferença considerável de deslocamento entre os diversos modelos. O modelo com redução de rigidez única para $0,7E_{ci}I_c$ apresentou resultado de deslocamento no topo praticamente coincidente com o modelo de referência do ANALEST, com cerca de 0,75% de diferença, apesar de ser contra a segurança.

Foi investigado também um modelo de redução única para $0,65E_{ci}I_c$. O resultado deste modelo apresentou bom ajuste em relação ao modelo NLGF, ficando a favor da segurança. Deve-se comentar, porém, que ele apresentou maior diferença em relação ao modelo de referência do que aquele com redução única para $0,7E_{ci}I_c$.

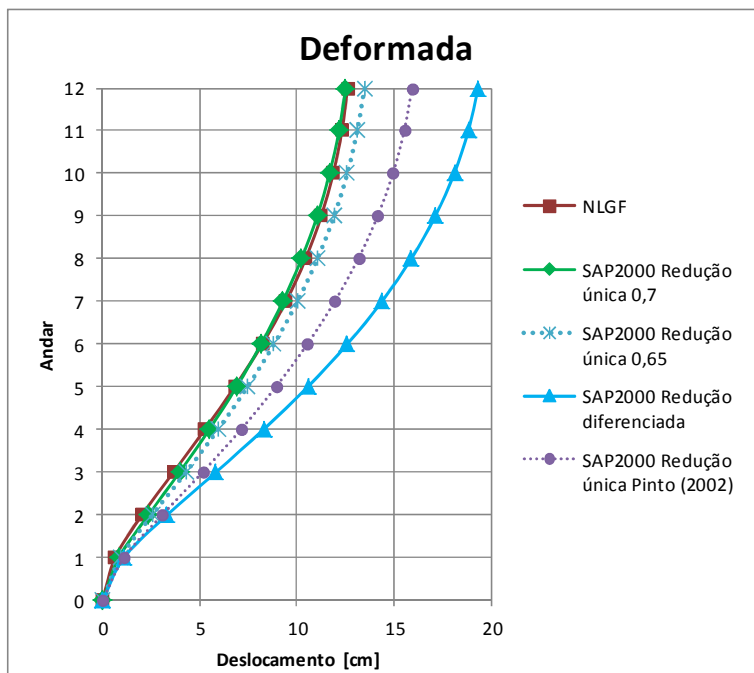
O modelo com redução da rigidez única das seções para 55% da inicial apresentou uma diferença maior em relação ao modelo de referência, mais de 25%, sendo mais flexível em relação ao modelo de referência. O modelo com redução diferenciada também foi mais flexível em relação aos resultados do modelo NLGF, com uma variação de 53,4% para o deslocamento lateral no topo.

A Figura 5-51 mostra que o modelo de referência do ANALEST e aquele com redução única para $0,7E_{ci}I_c$ de rigidez apresentaram deformadas praticamente coincidentes ao longo de toda a altura do pórtico, sendo contra a segurança a partir do sexto pavimento. Por outro

lado, o modelo com redução da rigidez única para $0,65E_cI_c$ acompanhou o comportamento do modelo de referência com diferença praticamente constante ao longo da altura do pórtico e sempre a favor da segurança.

A partir do segundo pavimento as deformadas dos modelos com redução diferenciada e com redução única proposta por Pinto (2002) se afastam do modelo de referência, sendo aquele correspondente à redução diferenciada o mais flexível ao longo da altura do pórtico a partir do segundo pavimento.

Figura 5-51 - Deformadas - Estudo NLGF simplificada - P5



5.6.8. P6

5.6.8.1. Estudo da não linearidade geométrica

Finalmente é feita a comparação, para o pórtico P6, entre o modelo NLG do ANALEST, considerando apenas a não linearidade geométrica na formulação, e o modelo do SAP2000 com não linearidade geométrica, admitindo-se material elástico linear em ambos os modelos. A malha utilizada no programa SAP2000 foi igual à apresentada na

Figura 5-9. O algoritmo utilizado para equilíbrio das equações não lineares foi o Newton-Raphson tangente, em ambos os programas. Aplicaram-se nos modelos, incrementalmente, cargas correspondentes aos valores de projeto (ver item 5.2.6).

Os resultados obtidos pelos diferentes modelos, em termos de deslocamento lateral no topo para cargas de projeto (7,82 kN) estão mostrados na Tabela 5-56. A diferença entre resultados para este exemplo foi de 0,15%, portanto, desprezível.

Tabela 5-56 - Comparativo de resultados - Estudo NLG - P6

Modelo	ANALEST	SAP2000
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,82	7,82
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	4,483	4,49

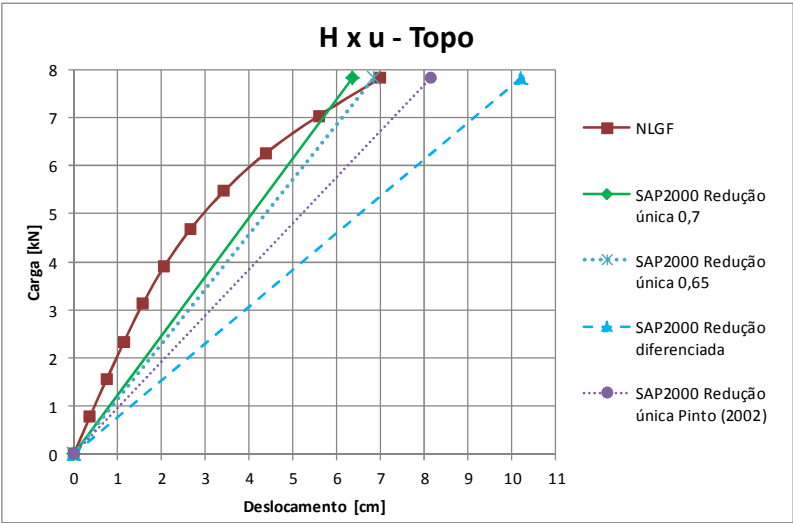
5.6.8.2. Estudo da não linearidade física simplificada

Finalmente é feito o estudo da não linearidade física simplificada para o pórtico P6, utilizando-se no modelo do programa SAP2000 as duas reduções de rigidez recomendadas pela NBR-6118/2007 e a redução única de Pinto (2002). Os resultados são comparados com o modelo de referência do ANALEST, considerando as duas não linearidades (NLGF), em termos de curvas carga *versus* deslocamento lateral no topo (Figura 5-52), tabelas com resultados numéricos (Tabela 5-57) e deformadas (deslocamentos laterais) ao longo da altura do pórtico (Figura 5-53). Para a comparação foram aplicadas, incrementalmente, cargas correspondentes aos valores de projeto, em todos os modelos do SAP2000 e no do ANALEST.

Tabela 5-57 - Comparativo de resultados - Estudo NLGF simplificada - P6

Modelo	NLGF	Redução única – $0,7E_{ci}I_c$	Redução única – $0,65E_{ci}I_c$	Redução única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Redução diferenciada – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,82	7,82	7,82	7,82	7,82
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	7,004	6,36	6,85	8,15	10,21
Diferença relativa [%]	-	9,14	2,19	16,36	45,77

Figura 5-52 - Carga x deslocamento - Estudo NLGF simplificada - P6



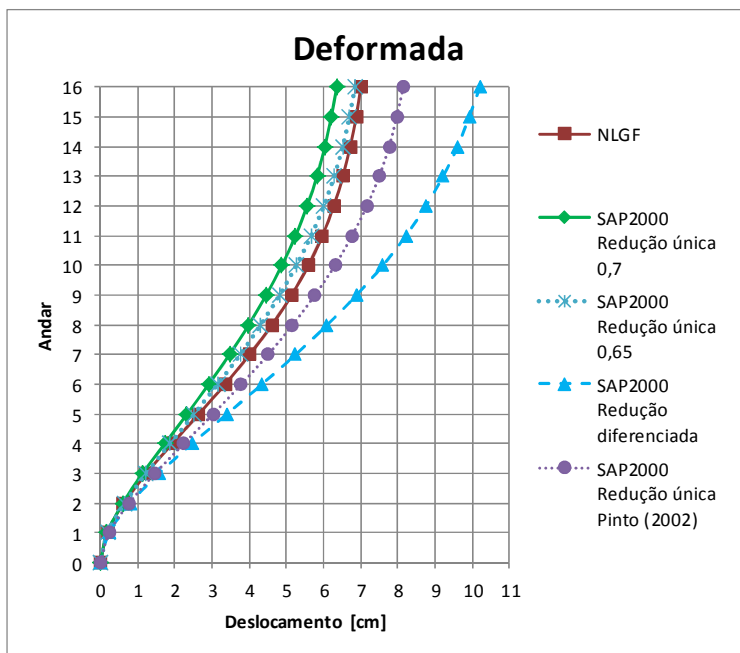
O modelo com redução única de $0,7E_{ci}I_c$ apresentou uma razoável aproximação ao modelo NLGF do ANALEST com relação ao deslocamento no topo, porém, seu resultado foi contra a segurança.

Um modelo com redução única para $0,65E_{ci}I_c$ também foi investigado. Com base nos resultados nota-se que este modelo foi o que mais se aproximou do modelo de referência do ANALEST, porém

apresentou um deslocamento lateral no topo 2,19% inferior, sendo relativamente contra a segurança.

Já o modelo simplificado com redução única de $0,55E_{ci}I_c$ apresentou uma diferença maior em relação ao modelo de referência do ANALEST, mas com deslocamento lateral no topo a favor da segurança, 16,36% a mais do que o modelo de referência. O modelo simplificado com redução de rigidez diferenciada foi o que mais se afastou do modelo de referência do ANALEST, mostrando-se muito flexível, com deslocamento lateral no topo 45,77% maior.

Figura 5-53 - Deformada - Estudo NLGF simplificada - P6



Quanto às deformadas, nota-se que até o terceiro andar os deslocamentos laterais obtidos por todos os modelos são próximos, e a partir desse andar as curvas mostram diferenças, sofrendo influência das diferentes considerações de não linearidade.

O modelo de redução única para $0,7E_{ci}I_c$ apresentou comportamento razoavelmente próximo do modelo de referência ao longo da altura do pórtico, sendo que a diferença entre os deslocamentos é constante a partir do décimo pavimento. O modelo simplificado com

redução única para $0,65E_{ci}I_c$ apresenta a deformada mais próxima à do modelo de referência do ANALEST ao longo de toda a altura do pórtico, com deslocamentos laterais um pouco menores, logo, mais rígido em comparação ao modelo de referência.

Já o modelo simplificado com redução única para $0,55E_{ci}I_c$ mostrou uma aproximação satisfatória em relação à deformada do modelo de referência, sendo mais flexível em relação a este último. O modelo simplificado com redução de rigidez diferenciada foi o que obteve a deformada mais afastada da deformada do modelo de referência do ANALEST, sendo que as diferenças aumentam com a altura do pórtico.

5.6.9. Comentários das análises

Admitindo-se material elástico linear, o modelo de não linearidade geométrica do SAP2000 apresentou pouca diferença em relação ao modelo do ANALEST para todos os seis pórticos estudados, sendo desprezível na maioria dos casos, apenas para o pórtico P2 houve uma diferença um pouco maior em relação ao deslocamento lateral no topo, de 3,14%. Levando-se em conta também a não linearidade física, as diferenças nos resultados dos dois programas foram causadas essencialmente por diferentes considerações de não linearidade física, tendo em vista a semelhança entre as formulações de não linearidade geométrica dos dois programas.

Na comparação entre o modelo de referência do ANALEST, NLGF, considerando ambas as não linearidades de maneira completa, e modelos simplificados utilizando-se o programa SAP2000, considerando o efeito de não linearidade geométrica, mas com não linearidade física simplificada, ressalta-se em primeiro lugar que os resultados da história de carregamento dos modelos simplificados que consideram rigidez reduzida das seções dos elementos não fornecem a rigidez inicial do pórtico e a perda de rigidez gradativa causada pela fissuração de seus elementos. Isso porque admitem de imediato que as seções das peças estão fissuradas. Assim, os resultados não devem ser interpretados como uma tentativa de modelagem do comportamento da estrutura ao longo da história de carregamento, devendo-se considerar como representativo apenas o resultado de deslocamento lateral final (admitido neste trabalho como sendo o correspondente a cargas aplicadas de projeto). Um resumo dos resultados desta comparação está apresentado na Tabela 6-23.

De forma geral, observa-se da Tabela 6-23 que os modelos que admitiram reduções únicas ($0,65$ e $0,7E_{ci}I_c$) de rigidez foram os que melhor representaram o modelo NLGF.

Para os pórticos P1 e P2, o modelo simplificado de redução única de $0,7E_{ci}I_c$ foi o que apresentou resultados mais próximos dos do modelo de referência (NLGF) do ANALEST, apresentando diferenças relativas a este, de deslocamento lateral no topo (correspondente à carga de projeto) igual a 4, 87% e 11,19%, respectivamente para P1 e P2. Interessante comentar que para os pórticos P1 e P2 os deslocamentos no topo foram maiores do que os obtidos pelo modelo de referência, ou seja, a favor da segurança.

Já para os pórtico P3 e P4, o modelo simplificado de redução única de $0,65E_{ci}I_c$ foi o que mais se aproximou do modelo de referência (NLGF) do ANALEST, apresentando excelentes resultados em relação ao deslocamento lateral no topo correspondente à carga de projeto: apenas 0,78% e 1,58% de diferença relativa ao modelo de referência, respectivamente para P3 e P4, ambos a favor da segurança.

Uma ótima aproximação também foi obtida com o modelo simplificado de redução única de rigidez de $0,7E_{ci}I_c$ para o pórtico P5 (0,74% de diferença relativa para deslocamento lateral no topo), porém, neste caso o deslocamento do modelo simplificado foi menor, sendo assim contra a segurança. Já para o pórtico P6, o modelo simplificado de redução única de $0,65E_{ci}I_c$ foi o que representou melhor o comportamento do modelo de referência, com apenas 2,19% de variação de deslocamento lateral no topo, sendo porém contra a segurança.

Os modelos com redução de rigidez diferenciada da NBR e o com redução de rigidez única proposta por Pinto (2002) se mostraram mais flexíveis do que o modelo de referência NLGF, ou seja, a favor da segurança. Por outro lado, apresentaram diferenças bem maiores em relação ao modelo de referência, se comparados ao modelo com redução única de rigidez para $0,7E_{ci}I_c$ da NBR e ao modelo com redução única para $0,65E_{ci}I_c$, investigada neste trabalho.

É interessante observar que os modelos simplificados apresentaram comportamentos distintos para as deformadas dos pórticos. Os modelos com redução única acompanharam a deformada dos modelos de referência, que apresentavam comportamento de pórtico. Já os modelos com redução diferenciada apresentaram deformada com deslocamentos maiores nos pavimentos superiores, indicando comportamento de pilar parede (já que a maior rigidez está concentrada nos pilares).

Tabela 5-58 - Comparativo de resultados entre modelo de referência (NLGF) de cada pórtico e os modelos com não linearidade física simplificada

Pórtico		NLGF	Red. única – $0,7E_{ci}I_c$	Red. única – $0,65E_{ci}I_c$	Red. única – $0,55E_{ci}I_c$ (Pinto, 2002)	Red. dif. – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,4E_{ci}I_c$	Red. dif. 2 – $0,8E_{ci}I_c$ e $0,5E_{ci}I_c$
P1	u [cm]	6,198	6,500	7,010	-	7,160	6,640
	Δ em relação NLGF [%]		4,87	13,10	-	15,52	7,13
P2	u [cm]	7,204	8,010	8,840	11,190	8,040	-
	Δ em relação NLGF [%]		11,19	22,71	55,19	11,6	-
P3	u [cm]	4,366	4,080	4,400	5,230	5,630	-
	Δ em relação NLGF [%]		-6,55	0,78	19,79	28,95	-
P4	u [cm]	4,942	4,650	5,020	5,990	6,030	-
	Δ em relação NLGF [%]		-5,91	1,58	21,2	22,01	-
P5	u [cm]	12,614	12,520	13,480	15,930	19,350	-
	Δ em relação NLGF [%]		-0,74	6,86	26,29	53,4	-
P6	u [cm]	7,004	6,36	6,85	8,15	10,21	-
	Δ em relação NLGF [%]		-9,14	-2,19	16,36	45,77	-

Fica claro que, para os modelos de pórticos estudados, a utilização do modelo de redução para 65% da rigidez inicial dos elementos permitiu ajustes satisfatórios com relação ao modelo de

referência, e em quatro casos, melhores que a redução única recomendada pela NBR-6118/2007.

Fazendo uma comparação com os mapas de espraçamento da NLF dos pórticos para as cargas de projeto, nota-se que todos os modelos apresentam maiores perdas de rigidez nas vigas, principalmente nas vigas inferiores (no máximo até a metade da altura do pórtico), enquanto os pilares não foram tão afetados. Ou seja, o desgaste previsto pelo modelo refinado do ANALEST prevê uma perda de rigidez diferenciada dos elementos, maior nas vigas do que nos pilares, porém maior perda de rigidez nas vigas dos pavimentos inferiores do pórtico.

6. CONCLUSÕES

6.1. CONCLUSÕES SOBRE O TRABALHO

O presente trabalho teve como objetivo estudar o comportamento não linear físico e geométrico de pórticos planos de concreto armado por meio de um modelo não linear refinado, de elementos finitos de barra de 3 nós e 7 graus de liberdade, implementado no programa ANALEST. Este programa havia sido validado anteriormente por Stramandinolli (2007), principalmente em relação à não linearidade física, em comparação com modelos experimentais de concreto armado de pequeno porte - vigas bi-apoiadas e contínuas, e pórticos planos de até dois pavimentos. Assim, neste trabalho, buscou-se validar o modelo do programa ANALEST para o efeito combinado da não linearidade física e geométrica de pórticos planos de concreto armado, inclusive de grande porte, em comparação com modelos e programas desenvolvidos por outros autores. Foram analisados ao todo seis exemplos de pórticos planos, selecionando-se pórticos estudados anteriormente por outros autores, desde um até dezesseis pavimentos de altura, de diferente geometria, propriedades de materiais e carregamentos.

Foram inicialmente efetuados alguns estudos paramétricos de modelagem, com relação a modelos constitutivos e alguns parâmetros. A partir desses estudos selecionou-se: o modelo do CEB-90 para representar o modelo constitutivo do concreto sob compressão; vinte camadas para se discretizar a seção dos elementos de barra; e a aplicação do efeito de *tension-stiffening* em todas as camadas de concreto fissuradas das seções dos elementos. Também se investigou a estabilidade numérica e eficiência computacional de alguns algoritmos de resolução de equações não lineares, optando-se em se utilizar o algoritmo de Newton-Raphson original, de matriz de rigidez tangente.

Em seguida, para validar o modelo não linear do programa ANALEST, foram comparados seus resultados para cada exemplo de pórtico plano com os obtidos por outros modelos/autores. Dentre os seis pórticos planos de concreto armado selecionados para este trabalho, cinco foram utilizados para esta comparação: dois estudados por Pinto (2002), modelados com elementos de barra e formulação corrotacional, utilizando modelo refinado de não linearidade física; dois estudados por Oliveira (2007), modelados por elementos finitos sólidos no programa ANSYS, usando modelos constitutivos de William-Warnke para concreto e Von Mises para o aço; e um estudado por Banki (1999), modelado por elementos de barra considerando apenas a não linearidade

geométrica, por meio da matriz de rigidez geométrica, considerando material elástico linear. Desta comparação pode-se concluir:

- houve uma ótima concordância do modelo do ANALEST com o modelo usado por Banki (1999) ao se utilizar a mesma malha de elementos, sendo o deslocamento lateral no topo do pórtico praticamente coincidente nos dois modelos.
- também houve uma ótima concordância entre os resultados do modelo do ANALEST e os do modelo desenvolvido por Pinto (2002), tanto em termos de curva carga *versus* deslocamento lateral no topo, como em termos da deformada do pórtico ao longo da altura, até o nível de carga correspondente ao escoamento do aço. Após esta carga a concordância foi apenas satisfatória, sendo que o modelo de Pinto mostrou um comportamento mais dúctil, obtendo um valor maior de carga última e deslocamento correspondente, devido à consideração do confinamento do concreto nos pilares propiciado pelos estribos (o que não foi considerado no modelo do ANALEST).
- na comparação do modelo do ANALEST com os modelos tridimensionais usados por Oliveira (2007) no programa ANSYS, houve uma boa concordância apenas para o pórtico maior, de 16 pavimentos, tanto em termos de curva carga *versus* deslocamento como para a deformada do pórtico ao longo da altura, até o nível de carga de projeto. Já para o pórtico de um único pavimento a concordância foi boa apenas em termos de carga última e a correspondente ao início do escoamento, mas o modelo do ANALEST mostrou-se mais rígido do que o modelo do ANSYS após a fissuração.

Apesar de que um maior número de exemplos seria necessário para uma conclusão definitiva, para todos os exemplos analisados o modelo do ANALEST mostrou resultados consistentes em comparação aos demais modelos, indicando que pode ser utilizado para descrever satisfatoriamente o comportamento não linear de pórticos planos de concreto armado. Um ponto importante a ser mais estudado e verificado no programa ANALEST é o efeito do confinamento do concreto dado pelos estribos, o qual não foi abordado neste trabalho. Existe no programa um modelo simplificado para considerar este efeito, tendo sido utilizado por Stramandinoli (2007) apenas para alguns exemplos de colunas.

Em seguida foi feito um estudo sobre a influência das não linearidades, consideradas isoladamente e combinadas, na análise dos

pórticos planos usando-se o programa ANALEST. Com exceção do pórtico P1 (de um pavimento), todos os pórticos analisados foram classificados como de nós móveis, com um parâmetro α maior do que o valor limite, indicando que os pórticos seriam suscetíveis aos efeitos de segunda ordem. Já para o coeficiente γ_z todos os pórticos ficam classificados como de nós fixos, salvo o pórtico P2. Nota-se, porém que, para os pórticos P4, P5 e P6 (classificados como de nós fixos), os valores do coeficiente γ_z ficaram muito próximos ao valor limite, indicando uma tendência semelhante à classificação fornecida pelo parâmetro α .

No entanto, nesse estudo de influência das não linearidades, em todos os pórticos estudados o efeito de não linearidade geométrica foi menor do que o da não linearidade física, podendo-se notar que esta última contribuiu bem mais para o deslocamento lateral no topo dos pórticos obtido pelo modelo de referência do ANALEST (considerando-se as duas não linearidades, modelo NLGF). Observou-se também que, quando a não linearidade geométrica está combinada com a não linearidade física, seu efeito sobre os deslocamentos laterais no pórtico aumenta consideravelmente, o que era de se esperar, pois uma estrutura fissurada se deforma mais e, consequentemente, maiores são os efeitos de segunda ordem. Conclui-se assim que é de extrema importância a consideração de ambas não linearidades na análise de uma estrutura real, principalmente no projeto de pórticos mais esbeltos.

Ainda usando o programa ANALEST foram traçados mapas de evolução das não linearidades físicas nos pórticos ao longo da história de carregamento, destacando-se o nível de carga de projeto e o imediatamente anterior à carga última. Observou-se que as vigas são os elementos mais desgastados ao longo da análise, principalmente as vigas situadas nos pavimentos inferiores dos pórticos, aonde ocorreu maior fissuração do concreto e escoamento do aço das armaduras. Também foi possível notar a redistribuição de esforços decorrente da fissuração nas vigas. Já nos pilares houve menos fissuração do concreto, sendo que para alguns pórticos o pico de compressão do concreto foi atingido e houve escoamento do aço das armaduras sob compressão na base dos pilares do pavimento térreo.

A formulação usada para não linearidade geométrica do ANALEST também foi verificada em comparação ao programa comercial SAP2000, considerando material elástico linear, obtendo-se resultados muito próximos. No programa SAP 2000, comparou-se as duas opções de não linearidade geométrica disponíveis, uma simplificada, com apenas a matriz geométrica, e outra formulação

completa para grandes deslocamentos, similar à usada no programa ANALEST. As diferenças encontradas foram muito pequenas para todos os exemplos de pórtico plano estudados neste trabalho, indicando que a formulação da matriz de rigidez geométrica fornece bons resultados para pórticos de concreto armado usuais.

Finalmente, realizou-se um estudo para se investigar procedimentos simplificados para tratar a não linearidade física, tomando-se como referência o modelo refinado do ANALEST, considerando ambas não linearidades. Foram estudados modelos com diferentes reduções de rigidez das barras dos pórticos, as recomendadas pela NBR-6118/2007, uma proposta de redução única para 65% da rigidez inicial e as propostas por Pinto (2002), utilizando-se o programa SAP 2000, no qual se levou em conta o efeito da não linearidade geométrica. Deste estudo observou-se que:

- o modelo simplificado de redução única para $0,7E_{ci}I_c$ (recomendado pela NBR-6118/2007) apresentou aproximação satisfatória em relação ao modelo do ANALEST, para todos os seis pórticos estudados, tanto em termos de deslocamento lateral no topo como para a deformada do pórtico ao longo da altura. Ressalta-se, porém, que em geral os deslocamentos foram um pouco menores do que os obtidos pelo ANALEST, indicando que uma redução maior da rigidez seria mais adequada em termos de segurança.
- já o modelo simplificado testado com redução única para $0,65E_{ci}I_c$ apresentou resultados satisfatórios para os pórticos P1 e P2 e excelentes para os pórticos P3 a P6 (de maior altura), tanto para a representação das suas deformadas, como para deslocamentos máximos no topo, sendo estes sempre maiores do que os deslocamentos do modelo de referência NLGF (logo a favor da segurança), exceto para o pórtico P6, em que o deslocamento no topo pelo modelo simplificado ficou ligeiramente menor em comparação ao do modelo NLGF.
- por outro lado, o modelo proposto por Pinto (2002) com redução única para $0,55E_{ci}I_c$ mostrou-se em geral bem mais flexível do que o modelo do ANALEST. Vale lembrar que, em seu estudo, Pinto (2002) chegou a este modelo proposto a partir da análise de um número maior de exemplos, os quais, em sua maioria, eram de pórticos extraídos de edificações reais, já construídas.

- os modelos simplificados com redução diferenciada (recomendados pela NBR-6118/2007) mostraram-se em geral mais flexíveis do que o modelo do ANALEST, mas não apresentaram uma boa concordância em relação à deformada ao longo da altura, principalmente para os pórticos mais altos.

Este trabalho não teve como objetivo tecer recomendações quanto à redução de rigidez para os elementos de pórticos planos de concreto armado, pois para isto um estudo comparativo envolvendo um maior número de exemplos seria necessário. Além disto, um modelo de barra tridimensional (ou pórtico espacial) seria mais apropriado para modelar o comportamento de edifícios de concreto armado, que levasse em conta o confinamento do concreto propiciado pelos estribos nos pilares e também a rigidez das lajes.

Assim sendo, deve-se primeiramente aprimorar o modelo do ANALEST, conforme sugerido no próximo item, para que este possa ser utilizado no desenvolvimento ou verificação de métodos simplificados.

6.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Vários aspectos ainda podem ser abordados dentro do tema discutido nessa dissertação. Segue uma lista de sugestões:

- análise de mais exemplos de pórticos planos de concreto armado de grande porte utilizando o programa ANALEST;
- análise do comportamento de pórticos planos de concreto armado levando em conta diferentes modelos para considerar as ligações viga/pilar;
- desenvolvimento de programas pós-processadores que facilitem a organização e análise de resultados do ANALEST;
- extensão do modelo do ANALEST para elemento de barra tridimensional (com um total de 13 graus de liberdade), utilizando restrição de diafragma rígido para consideração das lajes e levando em conta o confinamento do concreto propiciado pelos estribos, de forma a possibilitar estudos de não linearidade física e geométrica em edifícios de concreto armado;
- análise comparativa entre modelos simplificados e o modelo tridimensional do ANALEST para um número expressivo de exemplos de edifícios de concreto armado, com objetivo de

extrair recomendações quanto aos métodos simplificados de consideração da não linearidade física com redução de rigidez dos elementos.

7. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ACI Committee 318 (2002). **Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318 – 02) and Commentary (ACI 318R-02)**. American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2002, 391 pp.

ALVA, G. M. S.; **Dados das armaduras - Artigo IBRACON 2009**. [mensagem pessoal] Mensagem recebida por: <alva_gerson@yahoo.com.br>. em: 06 jan. 2012.

ALVA, G. M. S.; KAMINSKI JUNIOR, J. **Modelo para análise não-linear geométrica de edifícios de concreto armado considerando os efeitos da não linearidade física**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 51º, 2009. **Anais do 51º CBC**. Curitiba: 2009.

ALVA, G. M. S.; EL DEBS, A. L. H. C.; KAMINSKI JUNIOR, J. **Análise não-linear de estruturas de concreto armado em procedimentos de projetos de projetos: emprego de modelos de dissipação concentrada**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 3, nº 2, p.149-178, 30 jun. 2010.

ARARIPE, M. A. F. **A não linearidade física e geométrica em pórticos planos de concreto armado**. 71 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Infra-estrutura Aeronáutica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José Dos Campos, 1998.

ARAÚJO, J. M. **O módulo de deformação longitudinal do concreto**. Teoria e Prática Na Engenharia Civil, Rio Grande - RS, n. 1, p. 9-16. Out. 2000.

ARAÚJO, J. M. Modelos para previsão do módulo de deformação longitudinal do concreto: NBR-6118 versus CEB. **Teoria e Prática Na Engenharia Civil**, Rio Grande - RS, n. 12, p. 81-91. Set. 2008.

ARAÚJO, J. M. Avaliação do parâmetro de instabilidade para os edifícios altos. **Teoria e Prática Na Engenharia Civil**, Rio Grande - RS, n. 15, p. 41-53. Abr. 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8522**: concreto – determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação e da curva tensão-deformação. Rio de Janeiro, 2003.

BANKI, A. L. Estudo sobre a inclusão da não linearidade geométrica em projetos de edifícios. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

BELO, I. M. Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica. 185 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, 2009.

BRANCO, A. L. L. V. Análise não linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo dos esforços e deslocamentos. 87f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2002.

BRANSON, D. E. Design procedures for computing deflection. **ACI Journal**, v. 65, n. 9, p. 730-74, 1968.

CARVALHO, M. F. M. S. Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos. 71 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2010.

CHAN, E. C. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams. Berkeley, 1982. 361 f. PhD Thesis (Structural Engineering and Structural Mechanics) – University of California.

CHIMELLO, A. A. Análise não linear de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRFC. Florianópolis, 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

CHIMELLO, A. A.; LA ROVERE, H. L.; STRAMANDINOLI, R. S. B. Modelo de elementos finitos de barra (2D) para análise não linear de vigas de concreto armado. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE), 24., 2003, Ouro Preto. **Anais...Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2003. v. 1. p. 1-17. CD-ROM.**

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB State-of-art report:** Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures. Bulletin 45, 337 f. Lausanne, 2008.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis.** 3.ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1989.

CORELHANO, A. G. B. **Análise não linear geométrica e física de núcleos rígidos de edifícios altos em concreto armado.** 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2010.

COSTA, C.B. (2003). **Considerações sobre alguns modelos clássicos para análise estrutural de edifícios de andares múltiplos sujeitos à ação de forças laterais.** Belo Horizonte. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures.** Chichester: John Wiley And Sons, 1991. 335 p. (Volume 1).

D'AVILA, V. M. R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos.** 259 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, UFGRS, Porto Alegre, 2003.

EL-METWALLY, S.E.; CHEN, W.F. Nonlinear behavior of R/C frames. **Computers & Structures**, v. 32, n. 6. pn.1203-1209, 1989.

GAMINO, A. L.; SOUZA, J. L. A. O. e; BITTENCOURT, T. N. Avaliação das aberturas de fissuras em vigas de concreto armado: Modelo numérico rotacional distribuído vs. Modelo analítico da NBR 6118 (2003). In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 50°, 2008. **Anais do 50° CBC.** Salvador: 2008.

GOMES, D. I. S.; OLIVEIRA, L. M. F.; RAMALHO, M. A. Análise não-linear de pórticos planos em concreto armado: Comparação de procedimentos de cálculo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 50°. **Anais do 50° CBC.** Salvador: 2008.

HOGNESTAD, E. **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members.** Urbana, Illinois, 1951. Bulletin Series, 399:128 - University of Illinois.

IZZUDIN, B.A.; SIYAM, A.A.F.M.; SMITH, D.L. **An efficient beam-column formulation for 3D reinforced concrete frames.** Computers & Structures, v. 80, n. 7-8, p.659-676, 2002.

KABA, S.; MAHIN, S. A. **Refined modeling of reinforced concrete columns for seismic analysis**. Berkeley, 1984. EERC Report 84-03 – Earthquake Engineering Research Center-University of California.

LA ROVERE, H. L. **Nonlinear analysis of reinforced concrete masonry walls under simulated seismic loadings**. San Diego, 1990. Ph.D. Dissertation (Structural Engineering) - University of California.

LA ROVERE, H. L. **Utilização do método dos elementos finitos em projetos de estruturas**. Florianópolis: UFSC, 2002. Apostila.

LIMA, J. S. **Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto**: Desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas. 225 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2001.

LORIGGIO, D. D. **Notas de aula de Instabilidade de Estruturas**. UFSC: Florianópolis, 2010.

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear**. Guimarães: Universidade de Minho, 1999. 124 p. Apostila.

MACHADO, M. A. S. et al. Modelo de fissuração em estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos. In: CMNE/CILAMCE, 28º, 2007, Porto. **Anais CMNE/CILAMCE**. Porto: 2007.

MACGREGOR, J. G. **Design of slender columns – revisited**. *ACI Journal*, v. 90, n. 3, p. 302-309, 1993.

MACGREGOR, J. G.; HAGE, S. E. **Stability analysis and design of concrete frames**. *Journal of the Structural Division*, v. 103, n. ST10, p. 1953-1970, 1977.

MARTHA, Luiz Fernando. **FTool**: Two-dimensional frame analysis tool. Educational version 2.12. Disponível em: <<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>>. Acesso em: 01 fev. 2008.

MATZENBACHER, C. W.; CAMPOS FILHO, A.; PACHECO, A. R. Análise da ruptura por flexão e corte de vigas de concreto armado através do método dos elementos finitos. In: ASOCIACIÓN ARGENTINA DE MECÁNICA COMPUTACIONAL, 29º, 2010, Buenos Aires. **Mecánica Computacional Vol XXIX**. Buenos Aires: 2010.

MIRZA, M. S.; HSU, C. T. T.; SEA, C.S.S. Nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Computers & Structures**, v.13, n. 1-3, p. 223-227, 1981.

NETO, J. M. **Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto**. 192 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

NOGUEIRA, C. G.; LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Modelos para análise não-linear de estruturas em concreto armado usando o método dos elementos finitos. In: SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 9º, 2010. **Anais do 9º Simpósio de Mecânica Computacional**. São João Del-rei: 2010.

OLIVEIRA, D. M. **Parâmetros de instabilidade global das estruturas de concreto armado segundo a nova NBR-6118**. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, 2002.

OLIVEIRA, D. M. **Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração das não linearidades física e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado**. 272 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, 2007.

OVUNC, B. A.; REN, T. Nonlinearities in the analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 61, n. 6, p. 1177-1184, 1996.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. **An efficient nonlinear analysis of RC sections**. **Computers & Structures**, v. 53, n. 3, p. 613-623, 1994(a).

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. **An improved nonlinear analysis of reinforced concrete frames**. **Computers & Structures**, v. 53, n. 3, p. 625-636, 1994(b).

SANCHES, R. M. G. **Análise de pórticos de betão armado com elementos finitos híbridos de tensão**. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Instituição Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2009.

SAP 2000 PLUS. Integrated Finite Elements Analysis and Design of Structures. **Computers and Structures, Inc.** Berkeley, California, USA. Version 11, 2009

SHURAIM, A.B. **Lateral stiffness of plane reinforced concrete frames.** Computers & Structures, v. 64, n. 1-4, p. 771-782, 1997.

SILVA, R. M. **Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado:** Modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados. 264 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 1996.

SILVA, R. M.; MATOS, E. F. (2000). **Análise não-linear de pórticos planos de edifícios altos em concreto armado considerando a contribuição do concreto tracionado.** In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 19., 2000, Punta del Este. Anais. Punta del Este: 2000, v. único, p. 1-15. CD-ROM.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. **Elemento finito de barra para análise não linear geométrica de pórticos planos.** In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 36., 2005, Guarapari. Anais... Guarapari: CT/UFES, 2005. v. 1, p. 1-12. CD-ROM.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado.** 209 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil - UFSC, Florianópolis, 2007.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. **An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members.** Engineering Structures, n. 30, p.2069-2080, 25 fev. 2008.

VECCHIO, F. J.; BALOPOLOU, S. **On the nonlinear behavior of reinforced concrete frames.** Canadian Journal of Civil Engineering, v. 17, p. 698-704, 1990.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. **The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear.** ACI Journal, v. 83, n. 2, p. 219-231, 1986.

VECCHIO, F. J.; EMARA, M. B. **Shear deformations in reinforced concrete frames.** ACI Structural Journal, v. 89, n. 1, p. 46-56, 1992.

PAZ, C. N. M. **Modelo computacional para análise não-linear de vigas e pilares de concreto armado com confinamento na zona**

plástica. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1995.

PINTO, R. S. Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. 155 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 2002.

PINTO, R. S; RAMALHO, M. A. Não linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, p. 171-206. 2002.

APÊNDICE

APÊNDICE A – ESTUDOS DE MODELAGEM

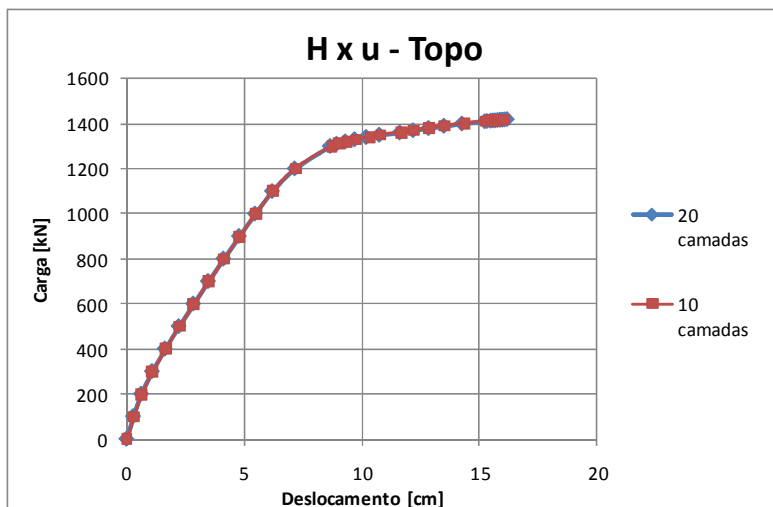
A.1 Estudo do número de camadas da seção

Pórtico P1

Chimello *et al.* (2003) recomendaram utilizar 20 camadas para discretizar a seção transversal dos elementos de barra. Porém, como o autor Silva (1996) discretizou a seção dos elementos do pórtico P1 em 10 camadas, foi feita uma verificação do efeito de se usar diferentes divisões na seção dos elementos, analisando-se dois modelos com o programa ANALEST: um com 10 camadas e outro com 20 camadas. Utilizou-se o modelo de referência do ANALEST, NLGF, que considera tanto a não linearidade física como a geométrica na análise. Aplicaram-se nos modelos, incrementalmente, cargas equivalentes às de projeto.

Os resultados estão apresentados em termos de curvas carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo do pórtico, Figura 1.

Figura 1 - Carga X deslocamento - Número de camadas na seção - P1



Observa-se da Figura 1 que a diferença entre os dois modelos é desprezível, sendo as curvas carga-deslocamento praticamente coincidentes.

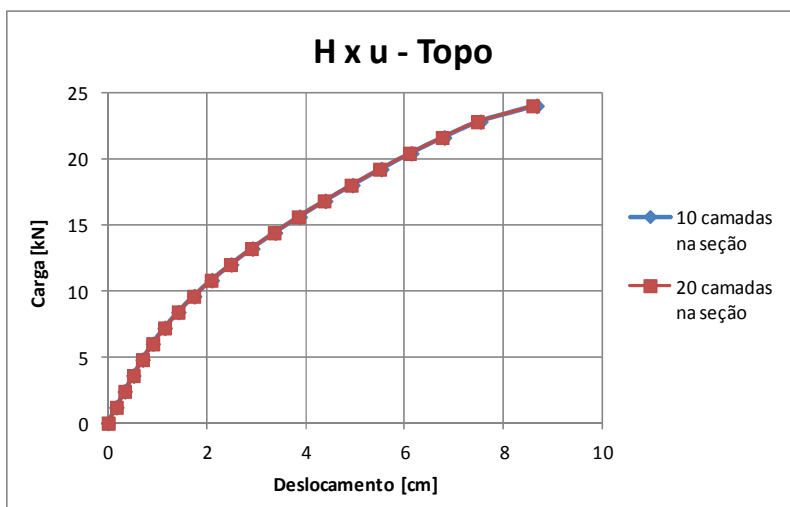
Pórtico P3

O autor Pinto (2002) também dividiu a seção transversal dos elementos de concreto em dez camadas. Assim, também se verificou, para este pórtico P3, dois modelos com o programa ANALEST: um com 10 camadas e outro com 20 camadas na discretização da seção transversal dos elementos de barra. Utilizou-se o modelo de referência do ANALEST, NLGF, que considera tanto a não linearidade física como a geométrica na análise. Aplicaram-se nos modelos, incrementalmente, cargas equivalentes às de projeto.

Os resultados estão apresentados em termos de curva carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo do pórtico, na Figura 2.

Observa-se novamente, da Figura 2, que as curvas carga-deslocamento obtidas pelos dois modelos praticamente coincidem.

Figura 2 - Carga X deslocamento - Número de camadas na seção - P3



Conclui-se que a diferença entre os dois modelos é desprezível, podendo-se utilizar tanto 10 como 20 camadas para se discretizar a seção dos elementos dos pórticos. Neste trabalho optou-se em se utilizar 20 camadas, pois este modelo apresenta a vantagem de possibilitar uma observação mais refinada do espraçamento das não linearidades ao longo da altura da seção dos elementos.

A.2 Estudo dos modelos constitutivos do concreto

Neste item é feito um estudo de modelos constitutivos e parâmetros utilizados no programa ANALEST, para o concreto sob compressão e tração. Investiga-se a diferença de algumas curvas constitutivas do concreto sob compressão e o efeito do número de camadas a considerar o efeito de *tension-stiffening*.

A.2.1 Estudo dos modelos constitutivos do concreto sob compressão

São investigados dois modelos constitutivos para o concreto sob compressão: o primeiro é o do CEB-90, em que se utiliza o módulo de elasticidade inicial do concreto E_{ci} , e segundo é o modelo modificado de Hognestad (curva parabólica), em que o módulo de elasticidade tangente na origem é calculado automaticamente pelo programa a partir da resistência à compressão e do valor de deformação correspondente. Neste estudo tanto a não linearidade física quanto a geométrica são consideradas no modelo do ANALEST (NLGF) e utilizam-se os parâmetros e propriedades dos materiais descritos no item 5.2. Para todos os pórticos, em ambos os modelos constitutivos utilizou-se a mesma resistência à compressão do concreto e deformação correspondente. No entanto, para possibilitar a comparação do modelo do ANALEST com o de outros autores, no modelo do CEB-90 utilizou-se para o módulo de elasticidade inicial o mesmo valor que foi utilizado pelos outros autores (a não ser quando o autor não especificou o valor utilizado, usando-se neste caso a equação do módulo de elasticidade do modelo constitutivo do CEB-90 descrita no item 4.6.1).

Os resultados das análises utilizando-se os dois modelos constitutivos diferentes estão mostrados, em termos de curvas carga lateral *versus* deslocamento horizontal no topo, nas Figuras 3, 4, 5, 6, 7 e 8, para os pórticos P1, P2, P3, P4, P5 e P6, respectivamente.

Figura 3 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P1

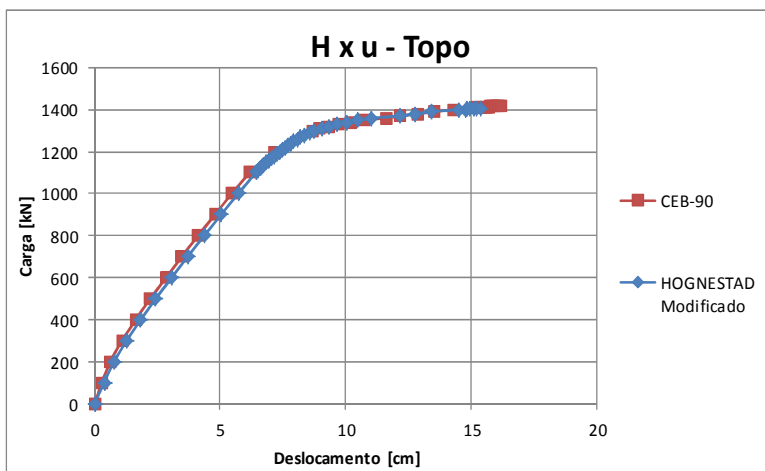


Figura 4 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P2

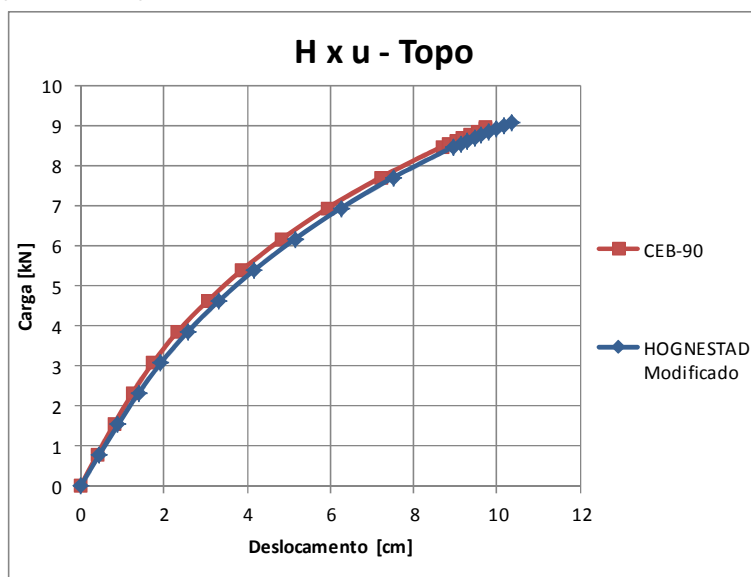


Figura 5 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P3

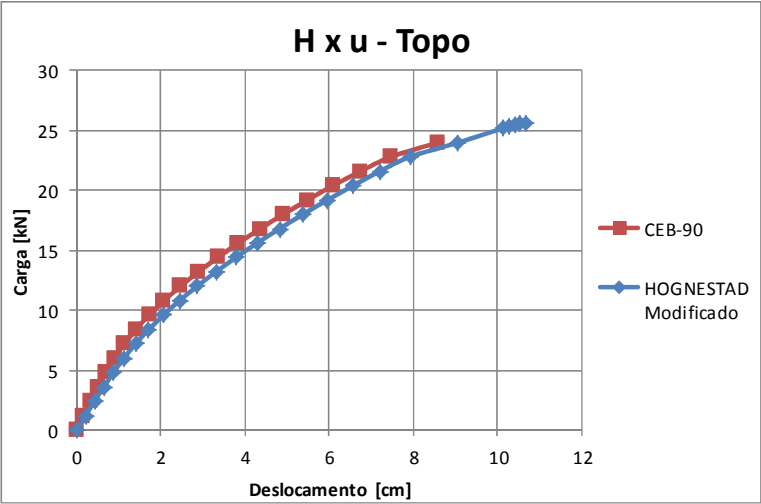


Figura 6 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P4

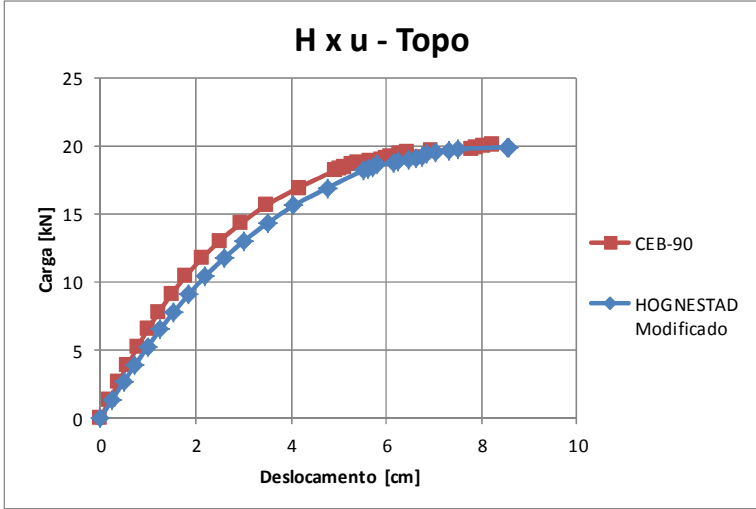


Figura 7 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P5

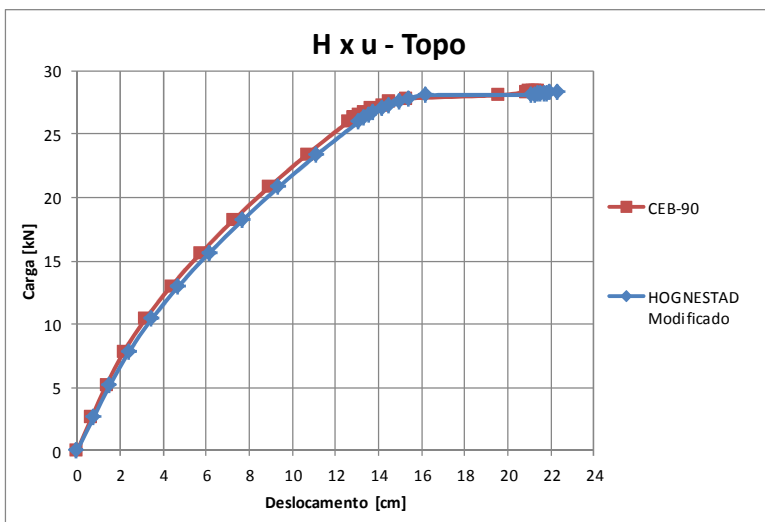
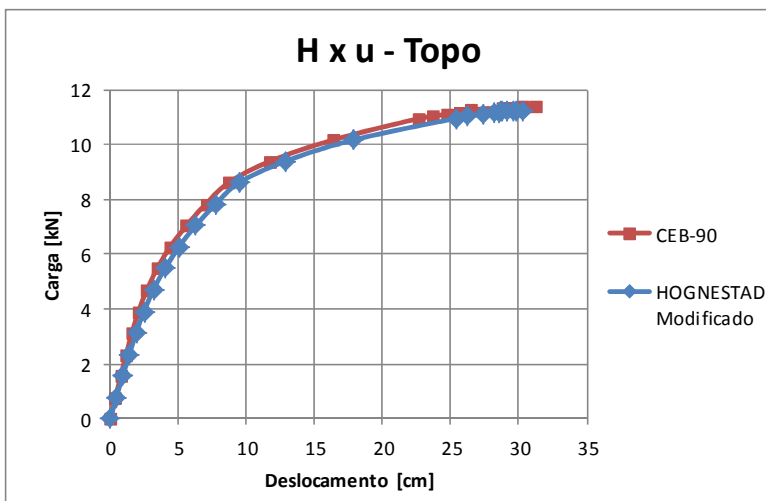


Figura 8 - Carga X deslocamento - Estudo das curvas constitutivas - P6



Observa-se das Figuras 3 a 8 que os resultados obtidos das análises usando-se dois modelos constitutivos diferentes para o concreto sob compressão são muito próximos, sendo quase coincidentes na

maioria dos pórticos. Neste trabalho se optou em utilizar no programa ANALEST o modelo constitutivo do CEB-90 para o concreto sob compressão de forma a facilitar a comparação com os modelos de outros autores, tendo em vista que este modelo apresenta um trecho inicial elástico linear.

A.2.2 Modelo de Tension Stiffening (T.S.)

Conforme visto no capítulo 3, em barras fletidas o efeito de *tension-stiffening* (TS) deve ser considerado apenas na região da seção transversal submetida à tração, estimada pela equação (119) como sendo aproximadamente igual a um quarto de sua altura (h_{ef}). Esta informação de em quais camadas da seção deve-se considerar o TS é um dado de entrada do programa. Para o caso de vigas, não há grandes dificuldades de se fornecer esta informação. No entanto, para o caso de pórticos, seria necessário inicialmente se realizar uma análise elástico linear para se obter o diagrama de momento fletor nos elementos e respectivos pontos de inflexão, para definição dos trechos em que as camadas inferiores ou superiores da seção estão submetidas à tração. Além disto, há a redistribuição de esforços ao longo da história do carregamento, o que complica ainda mais esta definição de em quais camadas será considerado o efeito de TS, para poder levar em conta a altura efetiva da seção.

A alternativa é considerar o efeito em todas as camadas da seção (quando estiverem submetidas à tração) em todos os elementos. Este modelo será testado a seguir e comparado ao modelo com trechos escolhidos e um quarto da altura da seção admitido para consideração do efeito de *tension-stiffening*. Nesta análise apenas a não linearidade física é considerada e o algoritmo de resolução das equações utilizado é o Newton-Raphson (matriz de rigidez tangente).

Foram utilizados dois pórticos dos selecionados no item 5.2 para se estudar o efeito do número de camadas consideradas para o efeito de T.S.: o P1 e o P2.

Pórtico P1

O pórtico P1 foi analisado com dois modelos: 1) modelo T.S. $\frac{1}{4}$ camadas - considerando apenas o efeito de *tension-stiffening* no número de camadas equivalente à altura efetiva (igual a um quarto da altura total, ver equação (119)), quando submetidas à tração, definindo-se os trechos tracionados a partir do diagrama de momento fletor obtido de

análise elástico linear (Figura 9); 2) modelo T.S. 20 camadas- com a simplificação de se considerar em todas as camadas submetidas à tração o efeito de *tension-stiffening*.

Os resultados estão apresentados em termos de curva carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo, na Figura 10, e valores numéricos correspondentes à carga máxima, na Tabela 1.

Figura 9 - Diagrama de momento fletor da análise elástico linear - P1

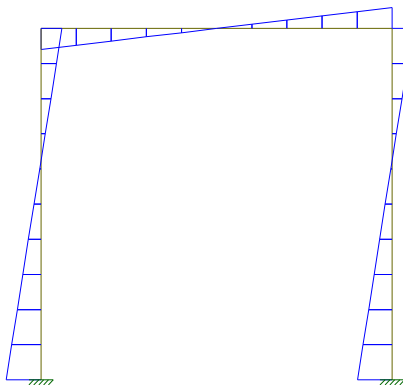
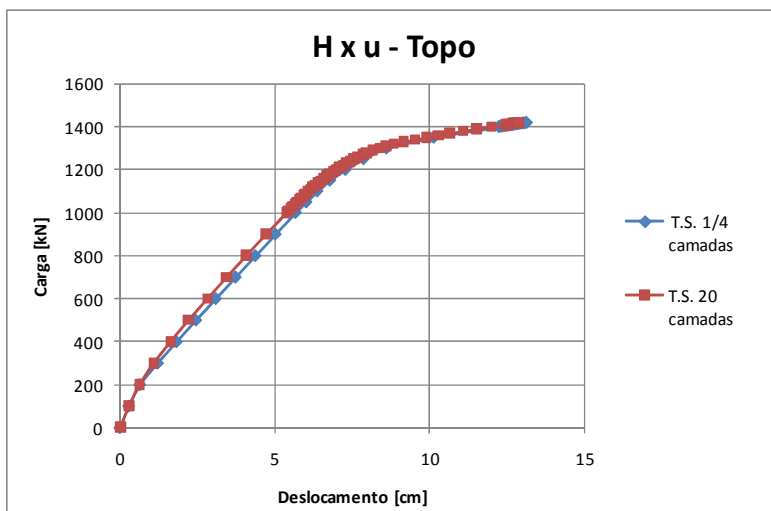


Tabela 1 - Comparativo de resultados - Modelo de *tension-stiffening* - P1

Modelo	T.S. ¼	T.S. 20
Carga última [kN] (lateral)	1419	1419
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	13,167	12,894

Com a observação dos dados disponíveis é possível concluir que os dois modelos estudados apresentam comportamento semelhante, atingindo carga lateral igual e diferença de apenas 2,07% no deslocamento lateral final de topo.

O modelo T.S.-20 camadas é relativamente mais rígido, já que há mais camadas com efeito de *tension-stiffening*. Porém, a diferença indica que o modelo simplificado poderia ser adotado sem alteração significativa nos resultados finais na análise do pórtico P1.

Figura 10 - Carga X deslocamento - Modelo *tension-stiffening* - P1

Pórtico P2

O pórtico P2 também foi utilizado para se avaliar a necessidade de se utilizar a altura efetiva da seção para consideração do efeito de *tension-stiffening*.

Utilizaram-se dois modelos: 1) modelo T.S. 1/4 camadas - considerando apenas o efeito de *tension-stiffening* no número de camadas equivalente à altura efetiva (igual a um quarto da altura total, ver equação (119)), quando submetidas à tração, definindo-se os trechos tracionados a partir do diagrama de momento fletor obtido de análise elástico linear (Figura 11); 2) modelo T.S. 20 camadas - com a simplificação de se considerar em todas as camadas submetidas à tração o efeito de *tension-stiffening*. Comparam-se então os resultados dos dois modelos na Figura 12 e na Tabela 2.

Figura 11 - Diagrama de momento fletor da análise elástico linear - P2

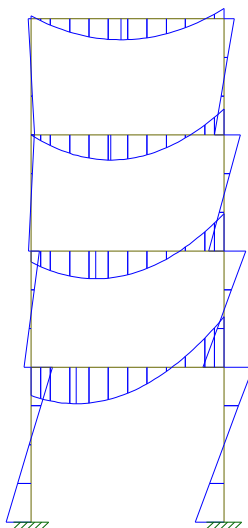
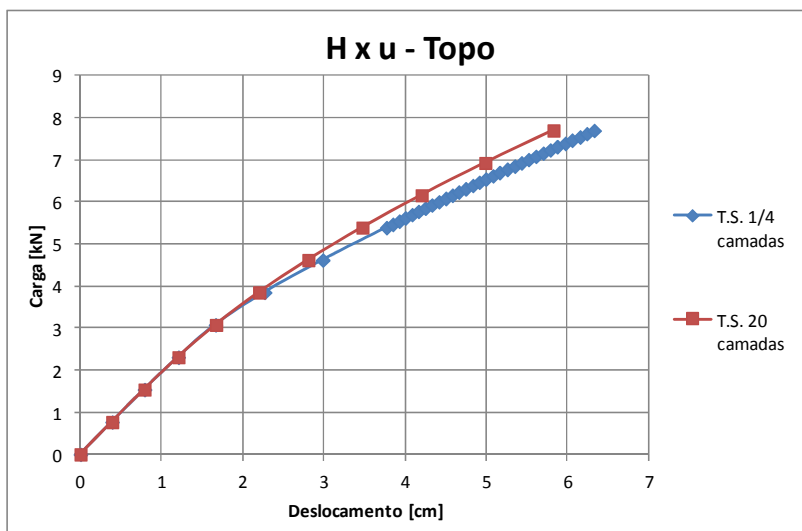


Tabela 2 - Comparativo de resultados - Modelo tension-stiffening - P2

Modelo	T.S. ¼	T.S. 20
Carga de projeto [kN] (lateral)	7,7	7,7
Deslocamento no topo [cm] (lateral)	6,327	5,826

Observa-se da Figura 12 que o modelo TS-20 camadas mostrou-se um pouco mais rígido, efeito já esperado, pois a contribuição da resistência do concreto entre as fissuras é maior nesse modelo.

A diferença de deslocamento final entre os dois modelos foi apenas satisfatória, de 7,92%. Ao longo da história de carregamento as duas curvas coincidem até o nível de carga lateral de 4kN, mas se afastam um pouco uma da outra a partir deste ponto. Conclui-se que a variação entre os modelos foi o nível de fissuração, comprovado pela análise do arquivo do ANALEST que fornece os dados de eventos em cada elemento (arquivo .S01). O modelo TS- ¼ camadas apresentou, em cada ponto de Gauss, a média de 1 a 2 camadas fissuradas a mais do que o modelo TS-20 camadas, tendo em vista que com menos efeito de *tension-stiffening* no modelo TS- ¼ há uma transferência de tensões para as camadas menos solicitadas.

Figura 12 - Carga X deslocamento - Modelo *tension-stiffening* - P2

Os resultados finais do pórtico mostram a semelhança entre os modelos. O modelo TS ¼ camadas pode ser aplicado sem problemas em elementos isolados, mas em um pórtico plano tem a desvantagem de necessitar uma análise elástico linear inicial de forma a determinar em todo o pórtico os trechos tracionados para calcular a altura efetiva nestes trechos (provocando a criação de mais seções). Além disso, em uma análise não linear há redistribuição de esforços e variação do ponto de inflexão dos diagramas de momento, acarretando numa alteração dos trechos tracionados.

Assim sendo optou-se neste trabalho em considerar a possibilidade de efeito de *tension-stiffening* em todas as camadas de todos os elementos na análise de todos os pórticos a serem analisados neste trabalho com o programa ANALEST.

APÊNDICE B

Apêndice B-1

Apêndice B-2

APÊNDICE C

Apêndice C-1

Apêndice C-2

APÊNDICE D

Apêndice D-1

Apêndice D-2

APÊNDICE E

Apêndice E-1

Apêndice E-2

APÊNDICE F

Apêndice F-1

Apêndice F-2

APÊNDICE G

Apêndice G-1

Apêndice G-2

